Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Alexandre Salvatore Dias

A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio

Rio de Janeiro

2018

Dias, Alexandre Salvatore

A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio / Alexandre Salvatore Dias - 2018

67.p

1. Matemática. 2. Ensino da Matemática. 3. Geometria Analítica. 4. Vetores. I. Antunes, Gladson Octaviano , orient. I.Título.

CDU D541

Alexandre Salvatore Dias

A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à Escola de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 12 de dezembro de 2018

BANCA EXAMINADORA

Gladson Octaviano Antunes
Doutor em Matemática - UNIRIO

Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática - UNIRIO

Orlando dos Santos Pereira
Doutor em Matemática - UFRRJ

Dedico este trabalho a meu pai, Virgínio de Almeida Dias e a minha mãe, Norma Salvatore Dias, pelo incentivo na minha formação acadêmica e por toda a dedicação na minha educação pessoal .

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de mostrar que a utilização de vetores no estudo de Geometria Analítica no ensino médio, não só facilita o entendimento dos conceitos e demonstrações, como também agiliza a resolução de problemas, otimizando o tempo - um fator muito relevante em concursos como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O trabalho destaca que a grande maioria dos livros didáticos de matemática disponíveis não trata desse assunto. Durante um período de 04 meses foi desenvolvido com um grupo de 10 estudantes uma abordagem vetorial de alguns tópicos da Geometria Analítica que podem ser beneficiados com a utilização de conceitos vetoriais. O software Geogebra foi utilizado como apoio ao processo de aprendizado dos alunos.

Palavras-chave: Matemática, Geometria, Vetores, Ensino Médio, Geogebra.

Abstract

This document aims to show that the use of vectors in the study of Analytical Geometry in High School, not only facilitates the understanding of concepts and demonstrations, but also speeds problem resolution by optimizing time - a very relevant factor in college admission tests such as the Brazilian National College Admission Test (ENEM). It will include the analysis of books commonly used in High School and will contain suggestions of where vectors can be of great use. Geogebra software will be introduced to support the student learning process.

Keywords: Mathematics, Geometry, Vectors, high school, Geogebra.

Agradecimentos

Agradeço a Deus a oportunidade de ter me proporcionado a vontade de estudar.

Agradeço a todos os professores que tive em minha vida escolar, em especial a querida e primeira professora, Ângela Maria de Andrade Silva, que através de seus ensinamentos e estímulos, não me criou nenhum tipo de trauma nesta fase inicial escolar e muito pelo contrário, me desafiou a ser um estudante dedicado e a ter conhecimento das minhas responsabilidades.

Agradeço a minha prima Luiza Nassif Senna Milana, por ter me ajudado a quebrar uma grande dificuldade em meus primeiros dias de escola, que era escrever o número dois.

Agradeço a minha prima Norma Suely Ramos do Amaral, por ter me ajudado em um momento difícil, me mostrando uma maneira simples e adequada de ler, interpretar e resolver problemas matemáticos.

Agradeço aos professores da Unirio pela dedicação e carinho com que fui recebido, em especial ao Professor Ronaldo Busse pela preocupação e interesse na conclusão desse curso.

Agradeço ao meu orientador Professor Gladson Antunes por ter me ajudado em momentos de dificuldades que ocorreram durante o curso e por ter aceitado me orientar na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos colegas de curso pelo incentivo, especialmente aos colegas e amigos Rodrigo Araújo e Wladmir Mendonça que por maiores que fossem as dificuldades particulares de cada um, sempre pude contar com sua boa vontade e prestatividade em me ajudar.

Agradeço a família pela paciência.

Agradeço aos meus alunos, pois foi em grande parte por eles que me lancei nesta aventura especialmente aqueles por terem participado de atividades que utilizei na elaboração deste trabalho, mesmo sem fazer parte do currículo estabelecido pela escola.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos, pois ajudou bastante durante o curso.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação e elaboração deste curso.

Agradeço a meu pai, Virgínio de Almeida Dias, que viu em mim o seu sonho de poder estudar e se formar em um curso superior e não mediu esforços para que isso se realizasse.

Agradeço a minha mãe, Norma Salvatore Dias, por ter me dado vida, pela dedicação, amor e incentivo que me proporcionou, e por todos maravilhosos e saudosos momentos de estudo quando pequeno.

Agradeço a todos que acreditaram e me apoiaram de alguma forma em algum momento, pois acredito que o que hoje vivemos são resultados do que aprendemos ao longo da vida, e me perdoem por não citar seus nomes, haja visto que a lista seria gigantesca.

Sumário

Introdução

Tenho observado em minha prática educativa, em escolas tanto públicas quanto privadas, que os alunos apresentam enormes dificuldades em entender alguns dos conceitos básicos de Geometria Analítica, tais como: distâncias, posições relativas entre retas, cálculo de áreas, dentre outros. Chama atenção também as dificuldades observadas na resolução dos problemas que envolvem tais conceitos.

Acredito que a introdução sistematizada do conceito de vetores e sua utilização na resolução de problemas pode contribuir positivamente para o aprendizado do estudante. De fato, o estudo de vetores no ensino médio, pode fornecer aos estudantes uma ferramenta que agiliza determinadas soluções tornado o estudo mais objetivo.

O intuito deste trabalho é mostrar que a utilização de conceitos simples de vetores aplicados de forma correta na resolução de exercícios de geometria analítica, pode trazer ao estudante rapidez e eficiência na obtenção da resposta final.

De um modo geral os livros de ensino médio apresentam a Geometria Analítica no terceiro ano, iniciando sua apresentação com Plano Cartesiano e demonstrando a fórmula da distância entre dois pontos. Utilizando o conceito de norma de vetor o aprendizado ficaria menos árido e atrativo para o aluno. A utilização de softwares matemáticos como o Geogebra, também tornaria o estudo mais agradável.

Tenho também observado nesses vinte anos que leciono Matemática, uma dificuldade maior dos estudantes no aprendizado da Geometria em relação a Álgebra, em especial a Geometria Analítica. Analisando as programações curriculares das escolas municipais, estaduais e particulares, observei que os estudos de Geometria se iniciam no sexto ano do ensino fundamental e plano cartesiano no sétimo ano do ensino fundamental. A união desses conteúdos, Geometria e Álgebra se faz no terceiro ano do ensino médio. Dessa forma passam-se aproximadamente 7 anos entre o início do aprendizado e sua culminância no terceiro ano do ensino médio. Esta observação nos mostra que os conteúdos são ministrados sem que se tenha a preocupação de relacionar a geometria e a álgebra desde o início da vida acadêmica dos alunos.

Em [10] as autoras afirmam que “[...] a introdução da álgebra é o grande momento de corte na educação matemática escolar, e que a reação usual é deixar para depois, ao invés de antecipar essa introdução”.

Ainda, segundo [10], "a Aritmética e a Álgebra constituem, junto com a Geometria, a base da matemática escolar”, por isso não se justifica retardar tanto a introdução destas, uma vez que ambas, ao serem desenvolvidas juntamente com a Aritmética propicia ao estudante uma base matemática mais sólida, capaz de diminuir os impactos gerados pelo contato desconecto desses três campos da Matemática.

Na disciplina de Matemática, no nono ano o Teorema de Pitágoras é apresentado sendo utilizado para cálculo de distâncias. Em Ciências também no nono ano, esse teorema é utilizado para calcular a força resultante de duas forças perpendiculares e o módulo da força. Assim, as noções iniciais de vetores são apresentadas em Ciências, deixando uma impressão inicial que o seu estudo somente se aplica à Física.

A ausência do estudo de vetores nos currículos de Matemática foi destacada em [8], uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), na qual o professor Elon Lages Lima, ao analisar diferentes livros de Matemática para o Ensino Médio afirma:

“[...]Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, [...] , é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física”. ([8], p.62)

O objetivo deste trabalho é chamar atenção para a possibilidade de desenvolver o ensino da Geometria, principalmente a Geometria Analítica, concomitantemente com a Álgebra e o estudo vetorial.

Defendo a inclusão, no ensino médio no currículo de Matemática, dos conceitos de vetores e operações vetoriais, afim de utilizar esses conceitos, na resolução de problemas, que normalmente são utilizados em avaliações escolares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Em 2016, propus aos alunos de uma turma do terceiro ano do ensino médio do colégio estadual CIEP 137 - Cecília Meirelhes em Petrópolis, estado do Rio de Janeiro, uma nova abordagem para alguns conteúdos de geometria analítica que eram contemplados no livro adotado naquele ano.

Uma parte formada por 10 alunos se interessou e assim, durante as aulas normais, reservei um tempo para que os conceitos de vetores fossem trabalhados.

Durante 4 meses, com esse grupo de estudantes, tive a oportunidade de apresentar os conceitos básicos de vetores e algumas aplicações à Geometria Analítica.

Ao terminar esse período, propus algumas atividades e solicitei que estes comentassem, de forma comparativa o método analítico e o método vetorial.

Afim de ilustrar a ausência do conteúdo de vetores no ensino médio, apresento em anexo no final desse trabalho as matrizes curriculares dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática para o 3º ano do ensino médio retirado do site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)[1].

O 3º ano do ensino médio é avaliado apenas no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Em Matemática (com foco na resolução de problemas) são avaliadas habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina. As matrizes de Matemática do Saeb estão estruturadas em duas dimensões. Na primeira dimensão, denominada **objeto do conhecimento**, são elencados quatro tópicos, relacionados a habilidades desenvolvidas pelos estudantes. A segunda dimensão da matriz de Matemática refere-se às **competências** desenvolvidas pelos estudantes. E dentro desta perspectiva, foram elaborados descritores específicos para cada um dos quatro tópicos mencionados anteriormente, diferentes para cada uma das séries avaliadas. Ao final do trabalho apresentamos a Matriz de Referência completa para a Matemática, referente ao terceiro ano do Ensino Médio. A partir de sua observação destacamos que:

Geometria analítica é tratada nos descritores D6, D7 e D8.

- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D8 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Pode-se observar que o assunto é tratado de uma maneira analítica bem elementar. Nem se fala de vetores em sua forma mais básica.

[1]http://portal.inep.gov.br/web/saeb/matrizes-de-referencia-professor

O programa curricular em uso nas escolas do estado do Rio de Janeiro que é chamado **Currículo Mínimo**[2], aborda apenas os conceitos mais básicos da Geometria Analítica. Esse currículo serve de base para o Ensino Médio e também para uma avaliação institucional chamada **Saerj** e avaliações preparatórias para o **Saerj** chamadas **Saerjinho**. A utilização dessas avaliações servem para medir o grau de conhecimento dos alunos sendo utilizadas como instrumentos de avaliações bimestrais. A Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro usa esses instrumentos para medir a eficiência da educação no estado. Defendo que a inclusão do estudo de vetores poderia abrir novos horizontes e despertar a curiosidade nos estudantes para novos conhecimentos.

Acredito que com apenas esses assuntos abordados nesse currículo o ingresso em universidades públicas ou em universidades particulares de qualidade fica comprometido.

O professor deverá determinar complementos para enriquecer os conteúdos a serem ministrados.

Fica como desafio contrapor este currículo, romper com este sistema, lutar pela autonomia pedagógica. O professor tem o poder de transformar este currículo, pois é ele quem trará a significação dos conteúdos em um dado contexto cultural. Suas concepções epistemológicas vão modelar este currículo prescrito e seu planejamento determinará o que realmente será ensinado. Esta ação do professor acaba sendo uma forma de transgressão a este currículo mínimo prescrito e arbitrado verticalmente pelo Estado.

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho o governo tornou pública a sua proposta para a Base Nacional Comum Curricular[3] (BNCC), e com muita satisfação, pode-se perceber a inclusão do conteúdo de vetores. Segundo o documento, na sua página 580:

> O trabalho com vetores deve proporcionar aos estudantes, inicialmente, compreender o conceito de vetor tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) como do ponto de vista algébrico (caracterizado por suas coordenadas). Na continuidade, esse trabalho é ampliado para que eles sejam capazes de interpretar a representação geométrica da soma de vetores e da multiplicação de um vetor por um escalar e de compreender as relações entre vetores e as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação). É importante que todo esse trabalho seja proposto de modo articulado e integrado com situações estudadas na Física, por exemplo, e com apoio

[2]http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=759820
[3]http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

de softwares de geometria dinâmica.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. No capítulo 1, são apresentados os conceitos básicos da Geometria Analítica, analisando a forma vetorial que pode ser utilizada na resolução de problemas normalmente aplicados no ensino médio.

No capítulo 2 são apresentadas algumas atividades que foram realizadas com os estudantes que participaram da pesquisa, comparando os métodos analítico e vetorial em exercícios comumente aplicados no Ensino Médio.Nessas atividades foi solicitada a opinião dos alunos referente aos métodos em questão.

O capítulo 3 traz um relato sobre a minha experiência com a utilização do software Geogebra em uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro.

Foi enviado por e-mail a diversos educadores um questionário indagando sobre a utilização de vetores em suas respectivas áreas de atuação. O questionário, bem como as respostas recebidas, são apresentados no capítulo 4.

O capítulo 5 é dedicado às considerações finais e conclusão. Por fim, há um capítulo com os anexos.

1 Vetores: uma proposta de abordagem

Analisando os livros de Matemática que são normalmente adotados no ensino médio tanto em escolas públicas quanto em particulares, é notória a ausência de uma abordagem como a que propomos nesse trabalho. Geralmente os autores apresentam brevemente o Plano Cartesiano e em seguida discutem a noção de distância entre dois pontos, tanto na reta $\mathbb{R}$ quanto no plano $\mathbb{R}^2$. Na sequência são vistos os conceitos de ponto médio, baricentro e a condição de alinhamento para três pontos dados no plano.

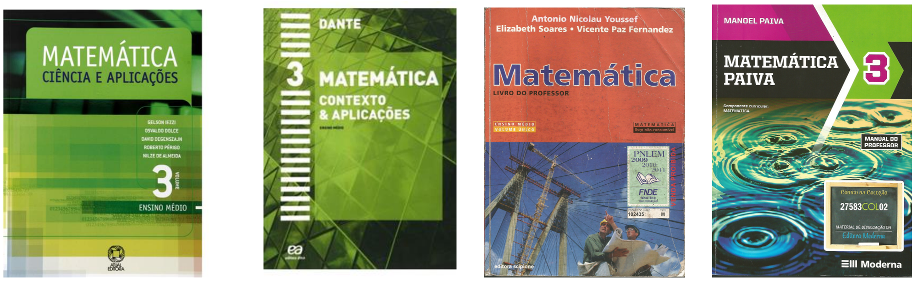


Figura 1.1: Capas de livros de terceiro ano do ensino médio de coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD

Toda abordagem desses livros é puramente analítica, ou seja, não leva em conta qualquer conceito vetorial. Acredito que o estudante do terceiro ano do Ensino Médio, deveria ter contato com o conceito de vetores. Desta forma, além de facilitar o aprendizado de Geometria Analítica, ele também estaria se preparando para resolver problemas de Física envolvendo grandezas vetorais.

Para o desenvolvimento desse trabalho foram consultadas as coleções de Matemática [3], [5], [14] e [11], todas aprovadas no último Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Nas próximas seções será apresentada, de forma simples e objetiva, uma proposta de abordagem vetorial para os tópicos: distâncias no plano, ponto médio, baricentro e a condição de alinhamento para três pontos. Iniciaremos com o conceito de *vetor*.

Conforme mencionado na Introdução desse trabalho, essa abordagem foi desenvolvida por um período de 4 meses no ano de 2016, com 10 estudantes voluntários do terceiro ano do ensino médio, do CIEP 137 - Cecília Meirelhes em Petrópolis, estado do Rio de Janeiro. Com esses estudantes foram trabalhados os conteúdos apresentados a partir da seção 1.2 até o final desse capítulo.

1.1 O conceito de vetor

Nosso objetivo inicial é definir *vetor* de um ponto de vista geométrico. A definição que apresentaremos a seguir, bem como as figuras dessa seção foram extraídas do material proposto pelo projeto *Livro Aberto de Matemática* [1], Capítulo de Vetores [2].

Inicia-se com a noção de *segmento de reta*. Sabemos que *segmento de reta* é o conjunto de pontos sobre uma reta que estão entre dois pontos chamados *extremos*.

Figura 1.2: Segmento de reta.

O que está representado na Figura 1.5, é uma reta r e um segmento de reta que contém os pontos compreendidos entre A e B. Representamos este segmento de reta pelas duas letras que caracterizam seus pontos extremos, ou seja, o segmento de reta da figura é chamado AB ou BA. O segmento AB é o mesmo que o segmento BA, pois ambos identificam o mesmo conjunto de pontos. A reta r, em que está o segmento AB, é chamada de reta suporte de AB.

Conforme mostrado na figura a seguir, em um segmento de reta AB é possível estabelecer duas orientações: de A para B e de B para A. Indicamos estes segmentos orientados, respectivamente, por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

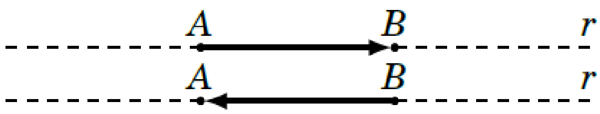


Figura 1.3: Segmentos de reta orientados.

O *módulo* do segmento orientado é o comprimento do segmento de reta que o define, ou seja, a distância entre seus pontos extremos. Portanto, módulo é sempre um número não negativo. Já a *direção* e o *sentido* do segmento orientado estão ligados

[1] umlivroaberto.com
[2] https://drive.google.com/file/d/1hszbVBaNIqJWXqDl-bfx4Lp38cqFYWfw/view

à orientação do segmento. Em Matemática, uma reta define uma direção e segmentos herdam a direção de sua reta suporte. Por simplicidade, utilizaremos apenas a expressão direção do segmento em referência à direção proveniente de sua reta suporte. Dizemos que dois segmentos têm a mesma direção se eles forem colineares (estão sobre uma mesma reta suporte) ou paralelos (quando estão sobre retas suporte paralelas).

A noção de *direção* é comumente confundida com o conceito de *sentido*, mas o *sentido* é a orientação sobre uma direção. Nota-se que, sobre cada direção existem sempre dois possíveis sentidos. Por exemplo, sobre a direção horizontal temos os *sentidos* da direita e o da esquerda e sobre a direção vertical temos os *sentidos* para cima e para baixo.

Apresenta-se então a definição de *vetor*:

Definição

Vetor é uma coleção de segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

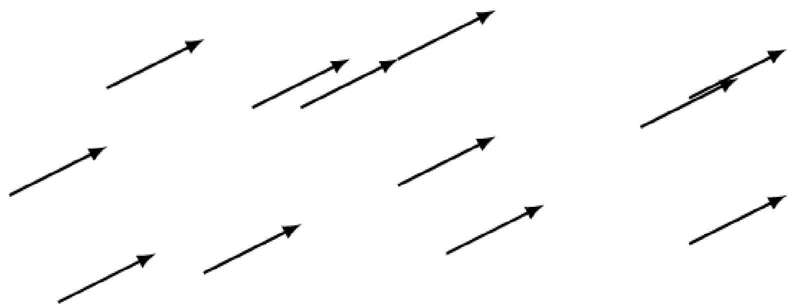


Figura 1.4: Segmentos orientados com mesmos módulos, direção e sentido.

É importante frisar que, segundo a definição, um *vetor* fica determinado por uma infinidade de segmentos de mesmo módulo, direção e sentidos. Isoladamente cada um deles pode ser chamado de representante do *vetor* ou simplesmente *vetor*.

Comumente um vetor é representado por uma letra minúscula, por exemplo $\overrightarrow{v}$ ou a partir das extremidades de um segmento orientado que o represente, como por exemplo $\overrightarrow{AB}$. O módulo de um vetor $\overrightarrow{v}$ é indicado por $|\overrightarrow{v}|$.

Apresenta-se a seguir e até o final desse capítulo, o conteúdo que foi apresentado aos estudantes que participaram voluntariamente dessa proposta.

1.2 Distância entre dois pontos no plano

Como foi visto acima, o *módulo* de um vetor é a distância entre seus pontos extremos. Baseado na experiência que o autor teve em sala de aula, sugerimos que sejam apresentadas as expressões que determinam a distância entre dois pontos A e B no plano, primeiramente para pontos com a mesma ordenada e em seguida, pontos com mesma abscissa e por fim para pontos A e B quaisquer.

Seja então $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos do plano cartesiano. Se $y_A = y_B$, isto é, os pontos A e B possuem a mesma ordenada, então $d_{AB} = |x_A - x_B|$.

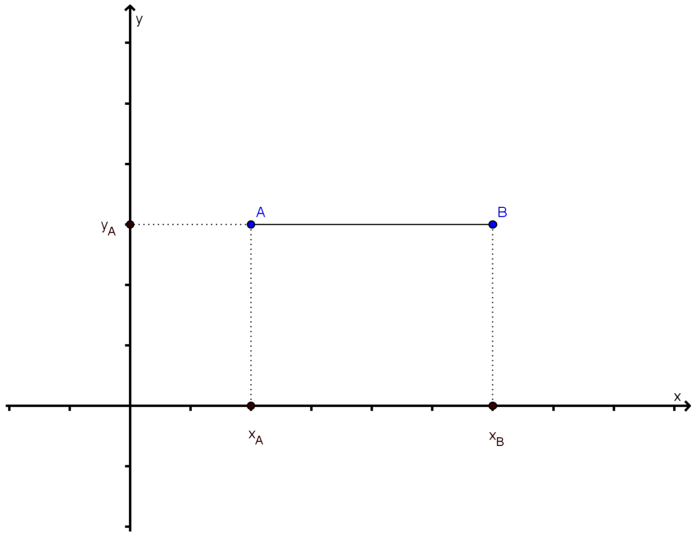


Figura 1.5:

Se $x_A = x_B$, isto é, os pontos A e B possuem a mesma abscissa, então $d_{AB} = |y_A - y_B|$.

Finalmente, para pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ conforme representados na Figura 1.7, têm-se que

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

É importante chamar atenção que a expressão para d_{AB} é obtida pela aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo da Figura 1.7. Outro ponto que deve ser salientado aos estudantes é que as duas primeiras expressões são casos particulares da terceira. De fato, se $x_A = x_B$ então

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|$$

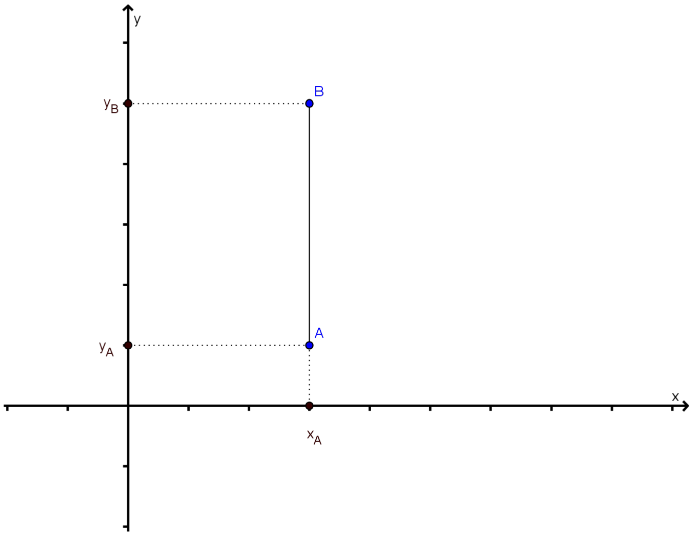


Figura 1.6:

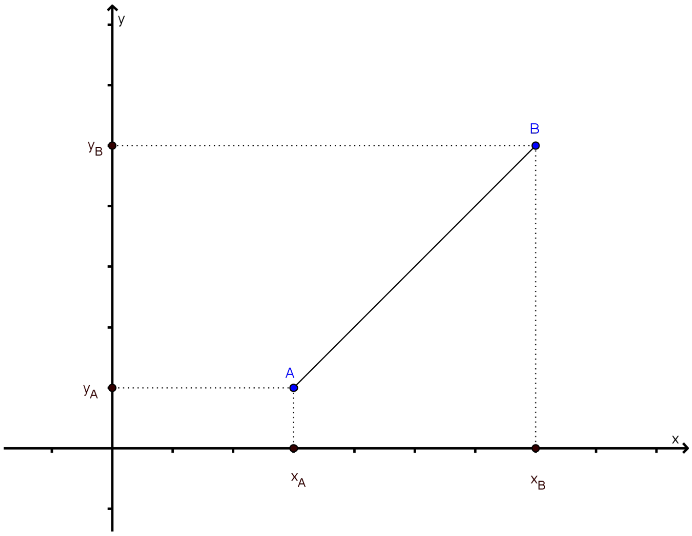


Figura 1.7:

e se $y_A = y_B$ então

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|$$

Após isso, uma atividade coma a apresentada abaixo foi realizada com os estudantes.

Atividade

Escolha um par de pontos A e B de forma que:

1. A e B estejam sobre o eixo x. Qual a distância entre os pontos escolhidos?
2. A e B estejam sobre o eixo y. Qual a distância entre eles?
3. Para os pontos que você escolheu no item 1, troque o sinal das suas abscissas. Marque esses novos pontos no eixo x. Qual a distância entre eles?
4. Escolha agora pontos A e B que não são sobre os eixos. Determine a distância entre os pontos escolhidos.

1.3 Equações Paramétricas da Reta

Considere um vetor no plano. Note que ele determina uma direção, o que significa que existem infinitas retas paralelas no plano que têm a mesma direção deste vetor. Entretanto, dado um ponto no plano, existe uma única reta passando por este ponto e que tem a mesma direção deste vetor. Nosso intuito é obter uma equação para representar a reta r cuja direção é dada pelo vetor $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, denominado vetor direção da reta, e que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$. Para isso, observe que um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{PP_0}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Ou seja, P pertence a r se, e somente se, existe um escalar t tal que

$$\overrightarrow{PP_0} = t\overrightarrow{AB}$$

Como as coordenadas de $\overrightarrow{PP_0}$ são dadas por $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0)$ e $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ obtemos que

$$(x - x_0, y - y_0) = (ta, tb).$$

Daí vem que,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b),$$

ou seja, a reta r que passa pelo ponto P_0 e têm direção dada pelo vetor $\overrightarrow{AB}$ será

$$r(t) = P_0 + t\overrightarrow{AB}.$$

Em que as equações

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ta \\ y(t) = y_0 + tb \end{cases} \tag{1.1}$$

são chamadas de **equações paramétricas da reta no plano**. A forma $r(t) = P_0 + t\overrightarrow{AB}$ é chamada **forma vetorial** da equação da reta.

É importante levar o estudante a compreender que para cada valor do parâmetro t têm-se um ponto no plano. A medida que t percorre todo o conjunto dos reais, teremos a reta no plano. O uso da geometria dinâmica pode ser de grande ajuda para a melhor compreensão do estudande. O seguinte arquivo em Geogebra desenvolvido pelo professor Waldecir Bianchini (IM-UFRJ) e disponível no endereço $https://www.geogebra.org/m/N7YUZyq7$ pode ser utilizado para auxiliar os estudantes na visualização da parametrização descrita acima.

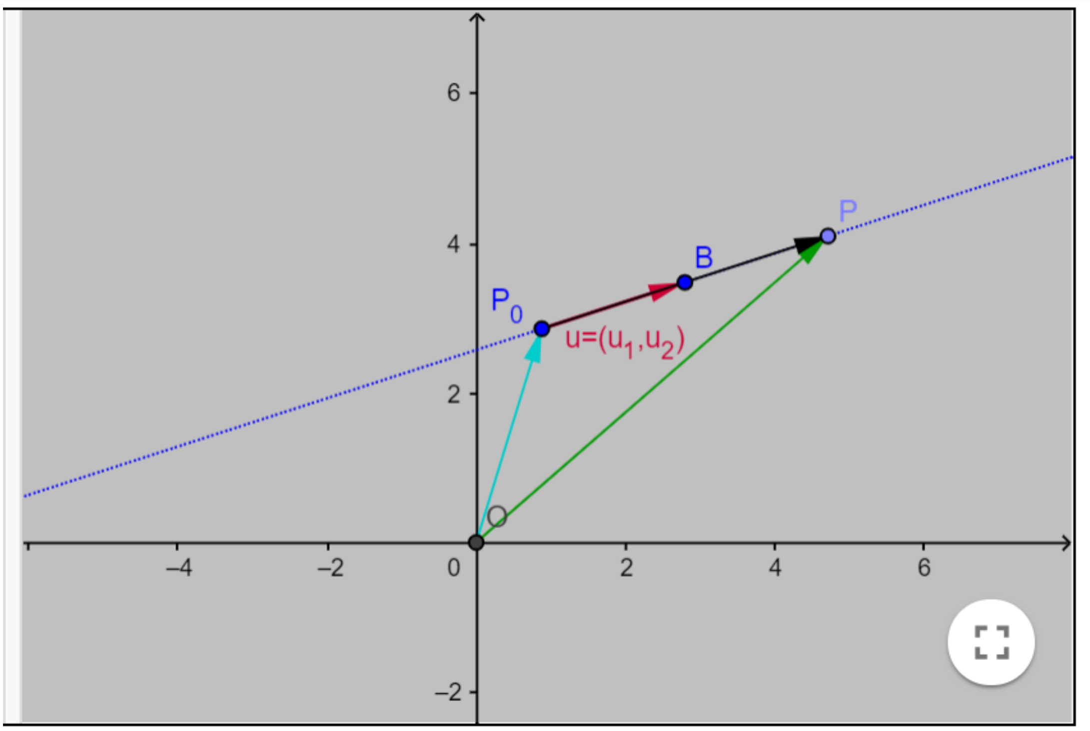


Figura 1.8: Parametrização de reta

Exercício

Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(3,5)$.

Solução: Inicialmente, iremos determinar a equação paramétrica, para logo em seguida isolar o parâmetro t e obter a equação envolvendo apenas x e y.

Considera-se que a reta passa pelo ponto $A(1,2)$ e têm direção dada pelo vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$r : r(t) = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$$

$$(x,y) = (1,2) + t[(3,5) - (1,2)]$$

$$r : (x,y) = (1+2t, 2+3t)$$

Fazendo $x = 1 + 2t$ e $y = 2 + 3t$, temos $t = \dfrac{x-1}{2}$ e $t = \dfrac{y-2}{3}$, que resulta na seguinte equação:

$$r : 3x - 2y + 1 = 0.$$

1.4 Posição relativa entre duas retas no plano

Nessa parte foram utilizadas noções vetoriais para investigar a posição relativa entre duas retas no plano. Sabe-se que dadas duas retas no plano, suas posições relativas podem ser: *paralelas*, *coincidentes* ou *concorrentes*.

Consideremos duas retas dadas em forma vetorial como $r : P + \overrightarrow{v}t$ e $s : Q + \overrightarrow{u}t$. Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, temos que as retas r e s serão *paralelas* se seus vetores diretores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas r e s são *coincidentes* se possuem o mesmo lugar geométrico, isto é, o mesmos pontos. Assim, um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de r (ponto P) pertence à reta s. Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes. Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas ou coincidentes elas claramente só podem possuir um ponto em comum, nesse caso elas são ditas *concorrentes*.

Para o estudo que será feito a seguir, foi necessário apresentar ao estudante a noção de produto escalar entre dois vetores.

Definição 1.4.1. Dados dois vetores, $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, definimos o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, como sendo o número real dado por: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ac + bd$.

Utilizaremos o produto escalar para caracterizar algebricamente uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada. Antes disso porém, foi necessário apresentar o seguinte resultado.

Proposição 1.4.1. *Dizemos que dois vetores são perpendiculares se, e somente se, seu produto interno é zero. Isto é,*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Prova: Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e, também $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Sabemos que o $cos\theta$ do ângulo θ formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90^{o}.$$

■

Observação 1.4.1. Sabe-se que um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta se $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer sejam os pontos $A, B \in r$.

A partir da observação acima, podemos concluir que, se r é uma reta que passa por um ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$. Então,

$$P = (x, y) \in r \iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$$

$$\iff \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$\iff \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

$$\Longleftrightarrow ax+by=ax_0+by_0$$

$$\Longleftrightarrow ax+by=c, \text{ onde } c=ax_0+by_0.$$

A expressão $r: ax+by=c$ é chamada **equação cartesiana** da reta r.

Na equação $ax+by=c$, os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\vec{u}=(a,b)$ à reta r e o valor de c se determina conhecendo um ponto de r, por exemplo, o ponto $A=(x_0,y_0)$. Vale observar também que a e b, ambos não podem ser iguais à zero, pois $\vec{u}=(a,b)$ não é um vetor nulo.

Feito isso foi apresentado sem demonstração o seguinte resultado:

As retas $r: ax+by=c$ e $s: a'x+b'y=c'$ são perpendiculares se e somente se seus vetores normais $\vec{u}=(a,b)$ e $\vec{t}=(a',b')$ são perpendiculares, ou seja:

$$aa'+bb'=0$$

Exercícios

1. Determinar a reta s paralela a reta $r: 5x-3y=1$ que passa pelo ponto $A(5,6)$.

Pelo que foi visto acima, $s: a'x+b'y=c'$ e $r: ax+by=c$, são paralelas se $a=a'$ e $b=b'$.

$s: 5x-3y=c'$.

Para determinar c', basta substituir as coordenadas do ponto A em s.

$c'=7$.

Portanto, $s: 5x-3y=7$.

2. Determinar a reta w perpendicular a reta $r: 5x-3y=1$ que passa pelo ponto $A(5,6)$.

Então, $w: a'x+b'y=c'$ e $r: ax+by=c$, são perpendiculares se $a.a'+b.b'=0$. Assim, $5a'-3b'=0$, onde $a'=3$ e $b'=5$, que dá $w: 3x+5y=c'$.

Para determinar c', basta substituir as coordenadas do ponto A em w.

$c = 45.$

Portanto, $w : 3x + 5y = 45$.

1.5 Condição de alinhamento de três pontos

Utilizando a notação e o conceito de vetores podemos dizer que, considerando os pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, o ponto B pertence a reta que passa por A e C, se e somente se

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC},$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

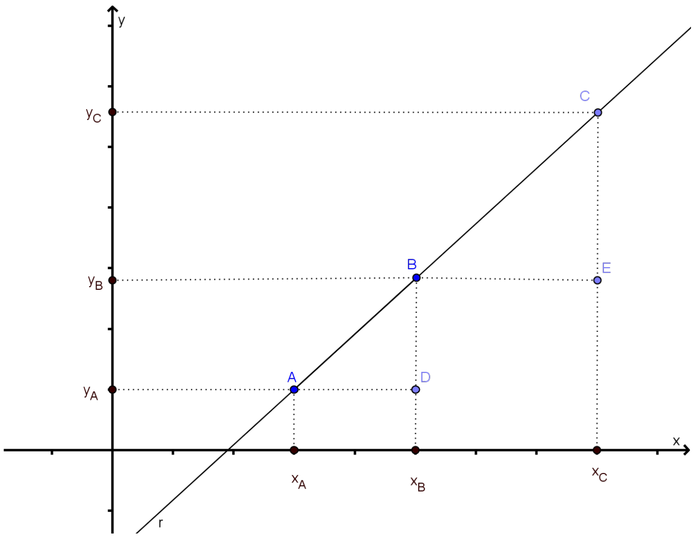


Figura 1.9: Alinhamento entre três pontos.

Os exemplos a seguir ilustram a aplicação da condição apresentada.

Exercício

1. Utilize a condição de alinhamento descrita acima para determinar se os pontos

$A(1,2), B(3,5)$ e $C(5,8)$ estão alinhados.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$$

$$B - A = \lambda(C - B)$$

$$(3,5) - (1,2) = \lambda[(5,8) - (3,5)]$$

$$(2,3) = \lambda(2,3).$$

Como a última igualdade é satisfeita para $\lambda = 1$, concluímos que os pontos A, B e C, estão alinhados.

2. Faça o mesmo para os pontos $A(1,2), B(3,5)$ e $C(5,10)$ estão alinhados.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$$

$$B - A = \lambda(C - B)$$

$$(3,5) - (1,2) = \lambda[(5,10) - (3,5)]$$

$$(2,3) = \lambda(2,5)$$

Nota-se que a igualdade acima não é possível, uma vez que para que ela ocorresse, λ deveria assumir simultaneamente os valores 1 e $3/5$, o que é impossível.

Concluímos então que os pontos A, B e C não estão alinhados.

1.5.1 Ponto Médio

Vamos utilizar o conceito de retas paramétricas para mostrar uma forma rápida e eficiente para o cálculo do **ponto médio** entre dois pontos dados no plano.

Seja então $r : r(t) = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$, a reta que passa pelo ponto $A(a,b)$ e têm direção dada pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, em que $B(c,d)$. Pelo que foi visto na seção anterior têm-se

$$(x,y) = (a + (c-d)t, b + (d-b)t).$$

Nota-se que, quanto $t = 0$ estamos no ponto A e quando $t = 1$ estamos no ponto B. Sendo assim, é razoável de se imaginar que quando $t = \dfrac{1}{2}$ estaremos no ponto médio entre A e B.

De fato, quando $t = \dfrac{1}{2}$ obtemos

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right),$$

que são as coordenadas do ponto médio M entre A e B.

1.5.2 Baricentro Método vetorial

Sejam $A(a,b)$, $B(c,d)$ e $C(e,f)$ pontos distintos e não alinhados no plano. Por definição, o **baricentro** é o ponto de interseção das três medianas do triângulo ABC.

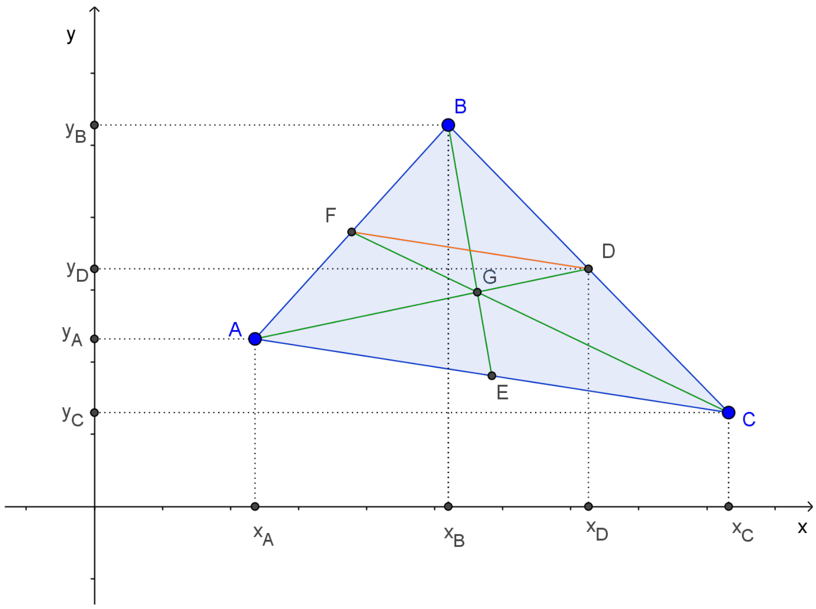


Figura 1.10: Baricentro

Vamos determinar o ponto de interseção de duas das medianas. Como o processo é análogo para cada par de medianas, este procedimento é suficiente para determinar o ponto do baricentro que chamaremos de G.

Considerando M ponto médio do lado AB e N ponto médio do lado AC, suas coordenadas serão dadas por:

$$M = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \text{ e } N = \left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$$

Se denotarmos por r e s as retas que contém os segmentos $\overline{MC}$ e $\overline{NB}$, pelo que foi visto na seção 1.2, suas equações paramétricas serão dadas, respectivamente por

$$r(t) = M + t\overrightarrow{MC} \qquad \text{e} \qquad s(t) = N + t\overrightarrow{NB},$$

ou seja,

$$r(t) = \left(\frac{a+c}{2} + \left(e - \left(\frac{a+c}{2}\right)t\right), \frac{b+d}{2} + \left(f - \left(\frac{b+d}{2}\right)t\right)\right)$$
$$s(t) = \left(\frac{a+e}{2} + \left(c - \left(\frac{a+e}{2}\right)t\right), \frac{b+f}{2} + \left(d - \left(\frac{b+f}{2}\right)t\right)\right)$$

O ponto G procurado é a interseção das retas r e s, portanto, igualando as coordenadas das retas acima teremos:

$$\frac{a+c}{2} + \left(e - \frac{a+c}{2}\right)t = \frac{a+e}{2} + \left(c - \frac{a+e}{2}\right)t$$

e

$$\frac{b+d}{2} + \left(f - \frac{b+d}{2}\right)t = \frac{b+f}{2} + \left(d - \frac{b+f}{2}\right)t$$

Em ambos os caso obtemos $t = \frac{1}{3}$.

Substituindo em r ou s, vamos encontrar que as coordenadas do ponto G serão

$$G = \left(\frac{a+c}{2} + \left(e - \frac{a+c}{2}\right)\frac{1}{3}, \frac{b+d}{2} + \left(f - \frac{b+d}{2}\right)\frac{1}{3}\right),$$

isto é,

$$G = \left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3}\right)$$

.

Apresenta-se a seguir, uma demonstração que utiliza argumentos geométricos para obter as coordenadas do **baricentro**.

Com base no triângulo abaixo vamos determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, a partir das coordenadas dos vértices deste triângulo.

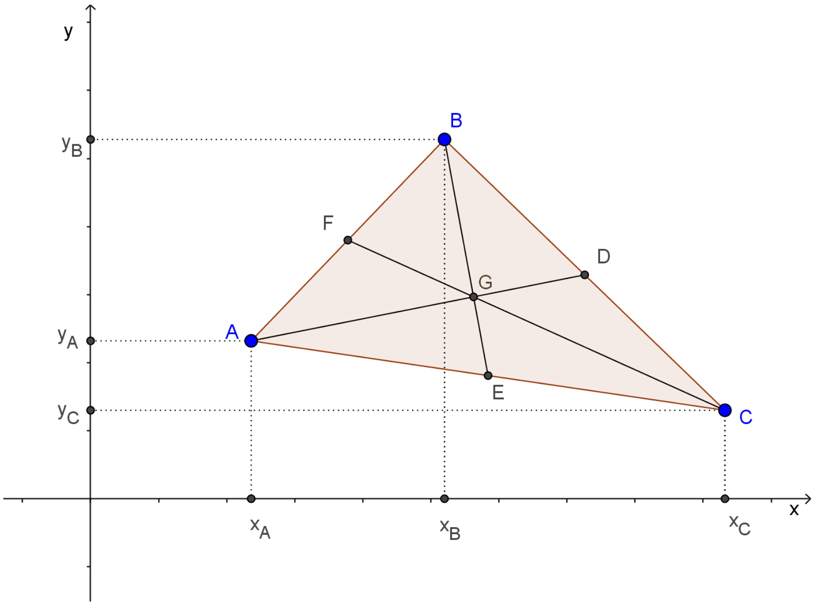


Figura 1.11: Baricentro

Sejam D, E e F pontos médios do segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

Sejam $\overline{AD}$ mediana referente ao lado $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ mediana referente ao lado $\overline{AC}$ e $\overline{CF}$ mediana referente ao lado $\overline{AB}$.

Como o ponto médio divide um segmento ao meio, temos que $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{CD} = \overline{BD}$ e $\overline{BF} = \overline{AF}$. Assim, analisando o ponto médio D temos, por semelhança de triângulos, que:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} \tag{1.2}$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} \tag{1.3}$$

Como a medida de $\overline{AF}$ é igual a medida de $\overline{BF}$, e a medida de $\overline{CD}$ é igual a medida de $\overline{BD}$, pelo *Teorema de Tales*, $\overline{FD}$ é paralelo a $\overline{AC}$.

Desse modo, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo BFD.

Assim,

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \implies \frac{\overline{FD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{2\overline{BD}} \implies \overline{FD} = \frac{\overline{AC}}{2} \tag{1.4}$$

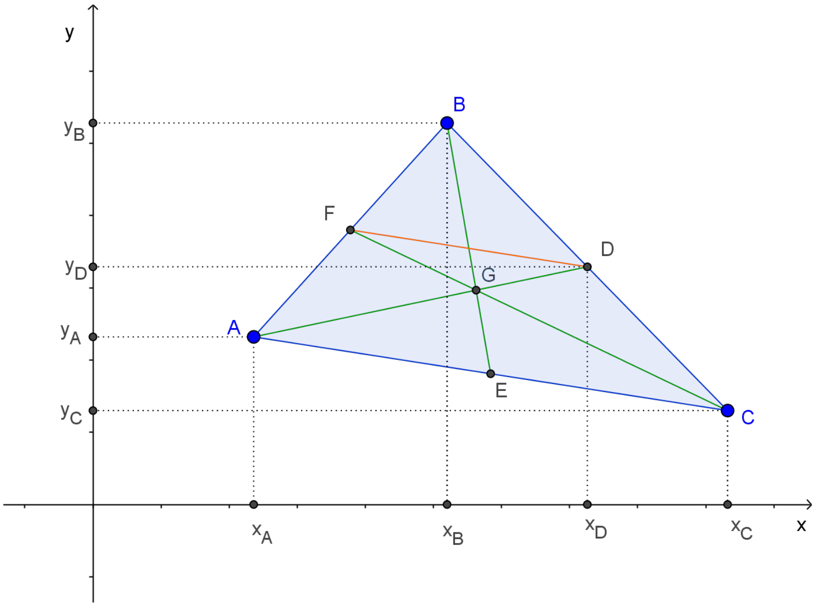


Figura 1.12: Baricentro

A igualdade em (1.3), é conhecida como *Teorema da Base Média.*

O triângulo ACG é semelhante ao triângulo DFG, e daí segue que,

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AC}{FD} \implies \frac{AG}{GD} = \frac{AC}{\frac{AC}{2}} \implies \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}.$$

Assim, por semelhança:

$$\frac{x_G - x_A}{x_D - x_G} = \frac{2}{1} \tag{1.5}$$

e

$$\frac{y_G - y_A}{y_D - y_G} = \frac{2}{1} \tag{1.6}$$

Substituindo (1.1) em (1.4) , segue que

$$x_G - x_A = 2x_D - 2x_G \implies x_G + 2x_G = x_A + 2\frac{(x_B + x_C)}{2}$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \tag{1.7}$$

Analogamente, obtém-se

$$y_G - y_A = 2y_D - 2y_G \implies y_G + 2y_G = y_A + 2\frac{(y_B + y_C)}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \tag{1.8}$$

Concluindo assim que,

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

1.6 Área de triângulo definido por três pontos não colineares

O último tópico abordado com os estudantes que participaram voluntariamente desse estudo, foi a determinação da área de um triângulo definido por três pontos não colineares no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Para isso foram apresentadas as seguintes definições.

Definição 1.6.1. O *produto vetorial* de dois vetores em $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ é dado por:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

Definição 1.6.2. A *norma* de um vetor é o valor que indica seu comprimento. A norma de um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}.$$

O *módulo do produto vetorial* entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser obtido em termos das normas dos vetores e do valor do *seno* do ângulo formado por eles.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = ||\vec{u}||||\vec{u}||sen(\theta). \tag{1.10}$$

Sejam então $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BA}$ vetores não nulos definidos a partir dos pontos não colineares A, B e C. Da Geometria Plana, sabe-se que a área S do triângulo ABC é obtida a partir do cálculo da metade do produto da medida da base pela medida da altura do triângulo. Isto é,

$$A = \frac{medida\ da\ base \times medida\ da\ altura}{2}. \qquad (1.11)$$

Como a altura do triângulo é $||\overrightarrow{BA}||\ sen\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, e a base é $\overrightarrow{BC}$, temos:

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{BC}||||\overrightarrow{BA}||sen\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}),$$

que pela relação em (1.10) será igual a

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} X \overrightarrow{BA}|.$$

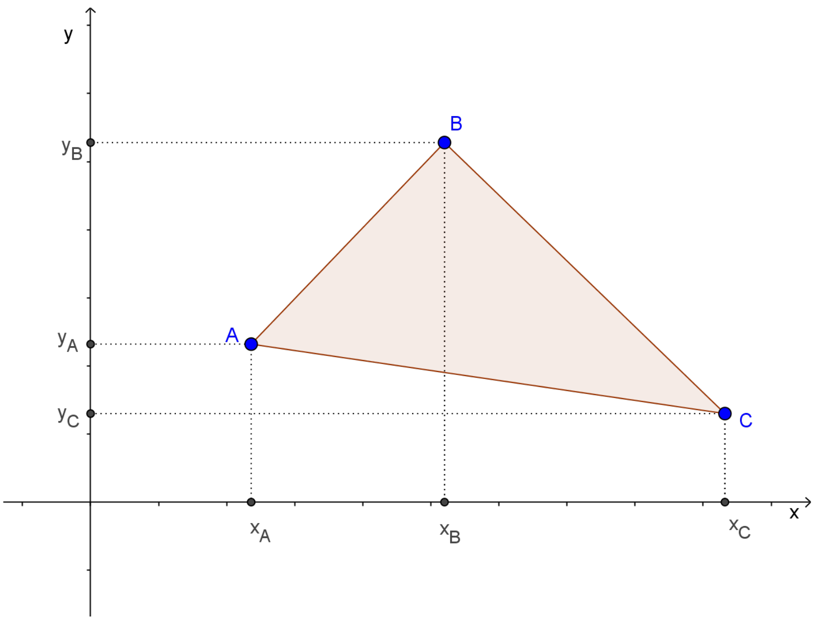


Figura 1.13: Área do triângulo ABC

Desse modo, temos que:

A área de um triângulo formado por três pontos não colineares no espaço é igual a metade do módulo do produto vetorial de dois vetores que constituem dois dos lados desse triângulo.

Exercício

Calcular a área do triângulo determinado pelos pontos $A(1,2,0), B(3,5,0)$ e $C(5,10,0)$.

Solução: Pelo que foi visto sabe-se que,

$$S = \frac{1}{2}.|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}|.$$

Portanto,

$$S = \frac{1}{2}|(C - B) \times (A - B)|.$$

Ou seja,

$$S = \frac{1}{2} \cdot |(2,5,0) \times (-2,-3,0)|,$$

isto é, $S = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

2 Aplicação de exercícios comparativos: Método algébrico versus Método vetorial

Após a apresentação dos conceitos expostos no Capítulo anterior, os estudantes participantes se dividiram em duplas e realizaram as atividades apresentadas a seguir. Para cada uma das atividades foi solicitado que eles a fizessem utilizando tanto a abordagem tradicional, apresentada na maioria dos livros didáticos, quanto pela abordagem vetorial. Logo após a apresentação da ficha com as atividades, no Capítulo seguinte, apresenta-se algumas das respostas dadas pelos estudantes participantes.

GOVERNO DO Rio de Janeiro

Colégio Estadual Princesa Isabel

Ficha do professor das atividades

Primeiramente o professor deve introduzir o conceito de vetores, mostrando e resolvendo exercícios com as ferramentas e operações vetoriais necessárias a execução desta atividade.

Também o professor já deve ter dado os conteúdos relacionados a Geometria Analítica previstos nos livros de ensino médio, comumente utilizados nas escolas.

O professor deve então separar os alunos em duplas e os orientar nas etapas seguintes:

1- De início a atividade deve ser resolvida utilizando os conhecimentos de Geometria Analítica utilizados nos livros de ensino médio.

2- Depois a mesma atividade deve ser resolvida utilizando os conhecimentos de vetores previamente discutidos e desenvolvidos em sala de aula.

3- Após encontrarem as soluções, o professor deve promover um debate com cada dupla, buscando conhecer qual processo é mais vantajoso para os alunos, no sentido de agilidade, facilidade e capacidade de entendimento do processo de resolução.

4- Finalizando, os alunos devem relatar com suas palavras suas impressões sobre os dois métodos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro	Colégio Estadual Princesa Isabel

Dupla :____ Turma: __________

Atividade 1

1) Esta atividade será realizada em duplas. A dupla deverá calcular a distância entre os pontos A(2,2) e B(10,8) de um plano cartesiano utilizando dois métodos: o analítico mostrado no livro texto e o método vetorial que estudamos em sala.

Método analítico:

Método vetorial:

1) Discuta com o colega da sua dupla e façam uma comparação entre os métodos e relatem no quadro abaixo os seguintes aspectos, caso vocês concordem um com o outro. Caso haja discordância, escrevam o que cada um pensa:

I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?
III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

Colégio Estadual Princesa Isabel

Dupla :____ Turma: ___________

Atividade 2

1) Esta atividade será realizada em duplas. A dupla deverá calcular a área definida pelo triângulo formado pelos pontos A(10,8), B(2,2) e C(10,2) de um plano cartesiano utilizando dois métodos: o analítico mostrado no livro texto e o método vetorial que estudamos em sala.

Método analítico:

Método vetorial:

1) Discuta com o colega da sua dupla e façam uma comparação entre os métodos e relatem no quadro abaixo os seguintes aspectos, caso vocês concordem um com o outro. Caso haja discordância, escrevam o que cada um pensa:

I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

GOVERNO DO Rio de Janeiro

Colégio Estadual Princesa Isabel

Dupla :____ Turma: ___________

Atividade 3

1) Esta atividade será realizada em duplas. Resolvam utilizando dois métodos: o analítico mostrado no livro texto e o método vetorial que estudamos em sala.

   (UFMG - 2002) Os pontos A = (2,6) e B = (3,7) são vértices do triângulo ABC, retângulo em A. O vértice C está sobre o eixo OX. A abscissa do ponto C é:

   A) NDA B) 8,5 C) 9 D) 8 E) 9,5

Método analítico:

Método vetorial:

1) Discuta com o colega da sua dupla e façam uma comparação entre os métodos e relatem no quadro abaixo os seguintes aspectos, caso vocês concordem um com o outro. Caso haja discordância, escrevam o que cada um pensa:

I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?
III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

GOVERNO DO Rio de Janeiro

Colégio Estadual Princesa Isabel

Dupla :____ Turma: ___________

Atividade 4

1) Esta atividade será realizada em duplas. A dupla deverá calcular a equação de reta que passa pelos pontos A(4,3) e B(9,6) em um plano cartesiano utilizando dois métodos: o analítico mostrado no livro texto e o método vetorial que estudamos em sala.

Método analítico:

Método vetorial:

1) Discuta com o colega da sua dupla e façam uma comparação entre os métodos e relatem no quadro abaixo os seguintes aspectos, caso vocês concordem um com o outro. Caso haja discordância, escrevam o que cada um pensa:

I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?
III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

Colégio Estadual Princesa Isabel

GOVERNO DO Rio de Janeiro

Dupla :____ Turma: ___________

Atividade 5

1) Esta atividade será realizada em duplas. A dupla deverá provar que as retas r: $2x - y + 1 = 0$ e s: $x + 2x - 10 = 0$ são perpendiculares em um plano cartesiano utilizando dois métodos: o analítico mostrado no livro texto e o método vetorial que estudamos em sala.

Método analítico:

Método vetorial:

1) Discuta com o colega da sua dupla e façam uma comparação entre os métodos e relatem no quadro abaixo os seguintes aspectos, caso vocês concordem um com o outro. Caso haja discordância, escrevam o que cada um pensa:

I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

2.1 Soluções dadas pelos estudantes

Nesta seção, serão apresentadas as soluções das atividades que foram propostas aos alunos bem como suas conclusões sobre a maior eficiência do método vetorial sobre o método analítico.

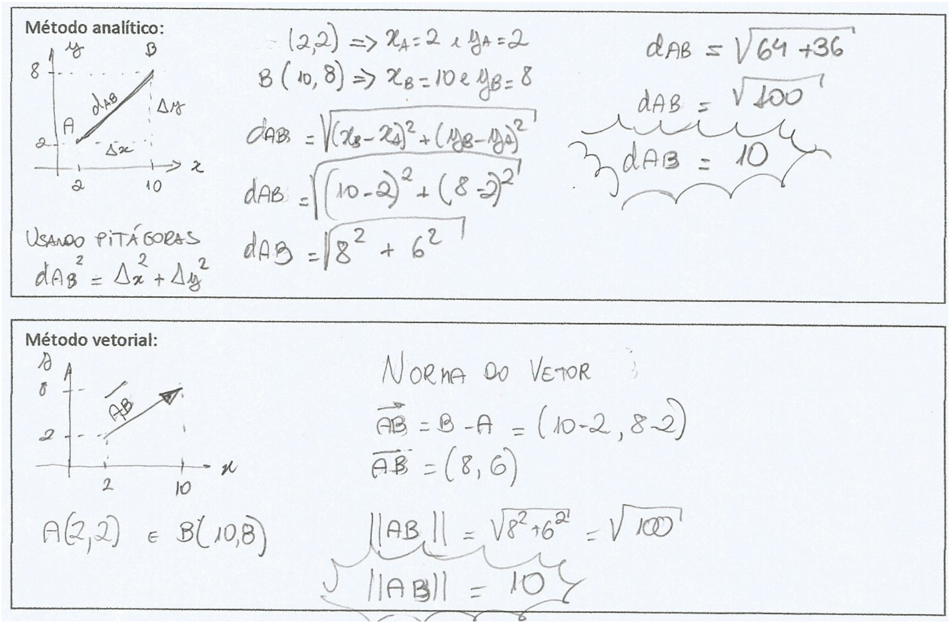
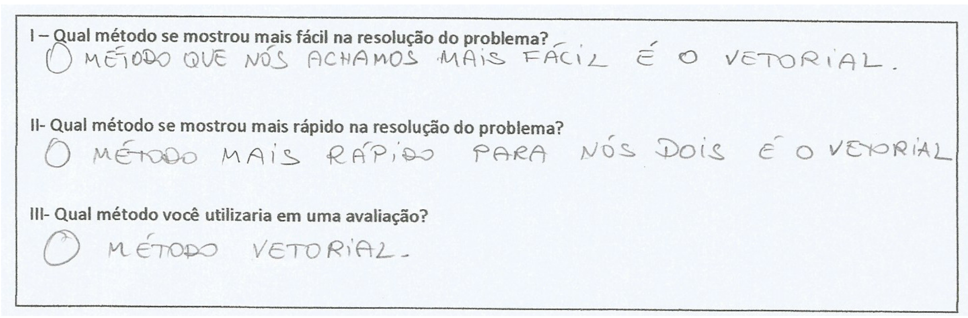


Figura 2.1: Solução atividade 1



I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

O MÉTODO QUE NÓS ACHAMOS MAIS FÁCIL É O VETORIAL.

II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

O MÉTODO MAIS RÁPIDO PARA NÓS DOIS É O VETORIAL

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

O MÉTODO VETORIAL.

Figura 2.2: Conclusão da atividade 1

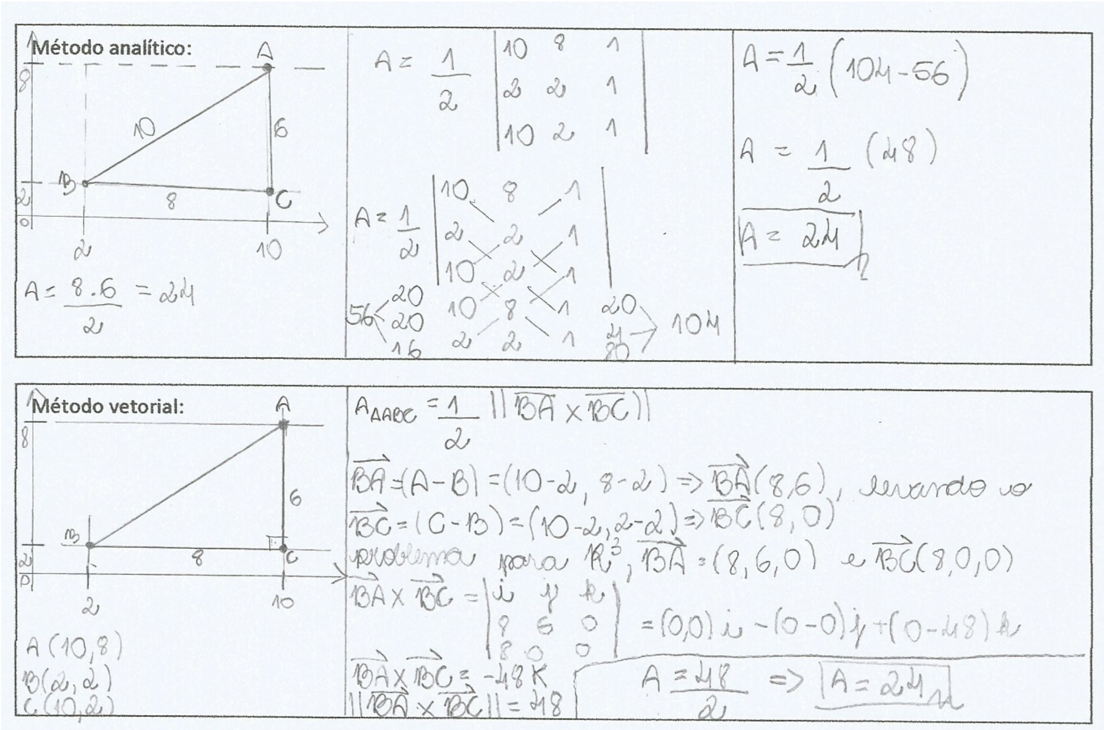
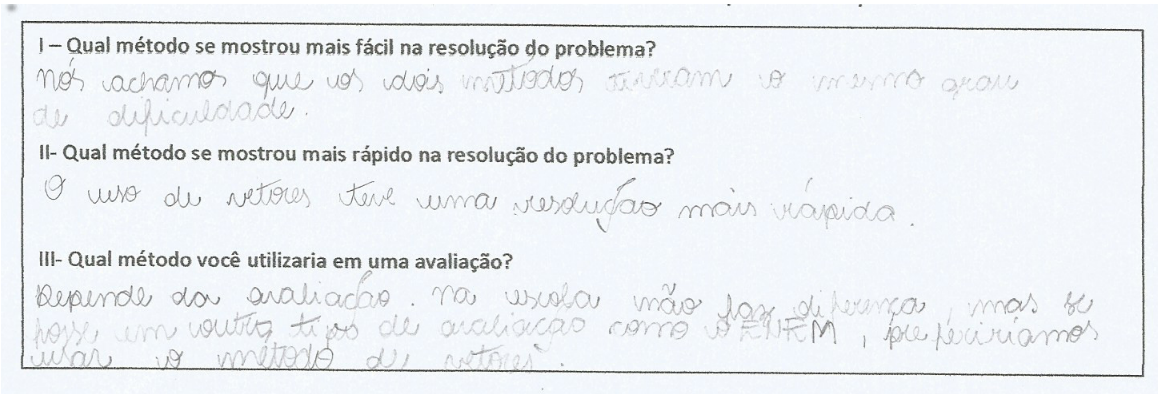


Figura 2.3: Solução atividade 2


I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

nós achamos que os dois métodos tiveram o mesmo grau de dificuldade.

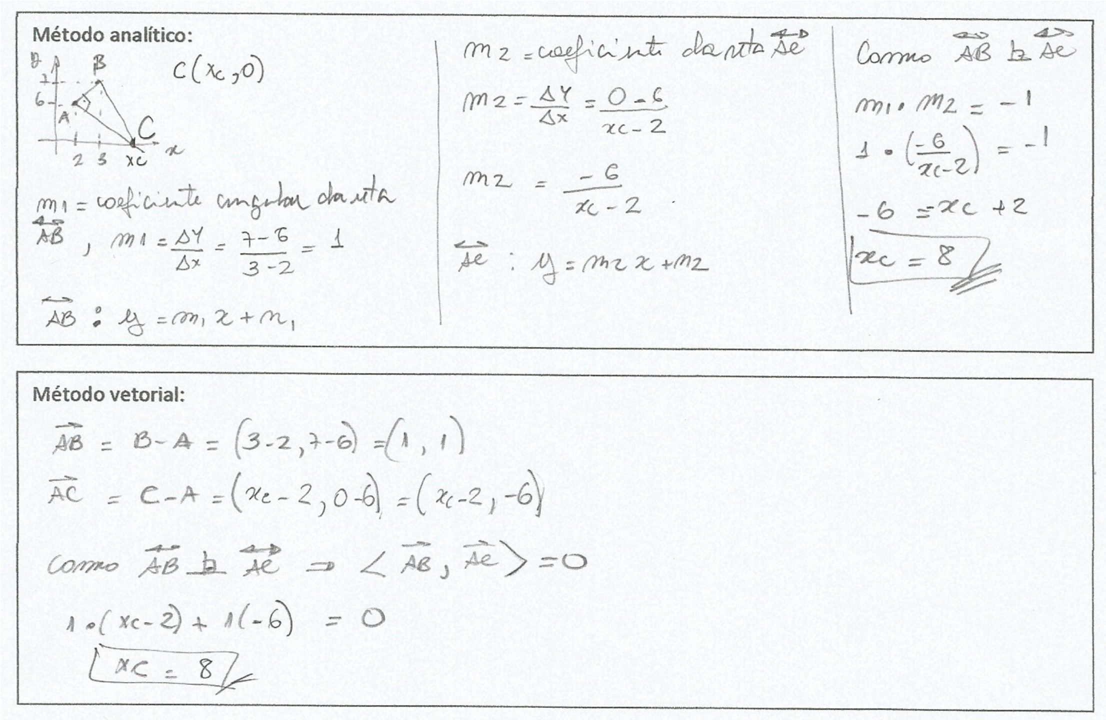
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

O uso de vetores teve uma resolução mais rápida.

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

Depende da avaliação. na escola não faz diferença, mas se fosse em outros tipos de avaliação como o ENEM, preferiríamos usar o método de vetores.

Figura 2.4: Conclusão da atividade 2



Método analítico:

$C(x_c, 0)$

m_1 = coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$, $m_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{7-6}{3-2} = 1$

$\overleftrightarrow{AB}: y = m_1 x + n_1$

m_2 = coeficiente da reta $\overleftrightarrow{AC}$

$m_2 = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{0-6}{x_c-2}$

$m_2 = \frac{-6}{x_c-2}$

$\overleftrightarrow{AC}: y = m_2 x + n_2$

Como $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$1 \cdot \left(\frac{-6}{x_c-2}\right) = -1$

$-6 = x_c + 2$

$\boxed{x_c = 8}$

Método vetorial:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3-2, 7-6) = (1, 1)$

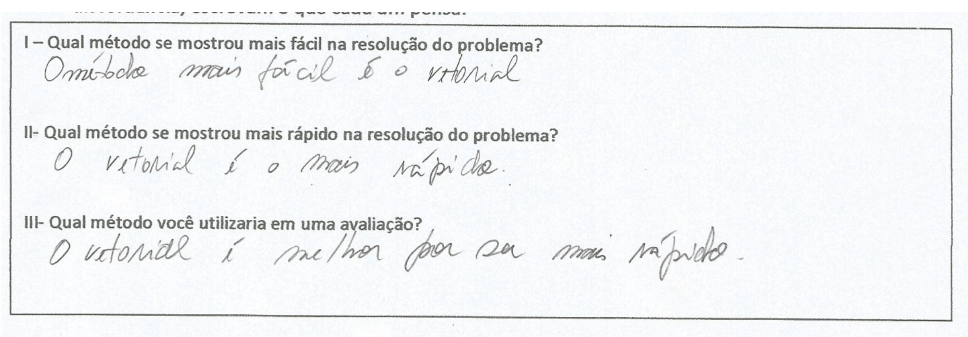
$\overrightarrow{AC} = C - A = (x_c - 2, 0-6) = (x_c - 2, -6)$

Como $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$

$1 \cdot (x_c - 2) + 1(-6) = 0$

$\boxed{x_c = 8}$

Figura 2.5: Solução atividade 3



I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

O método mais fácil é o vetorial

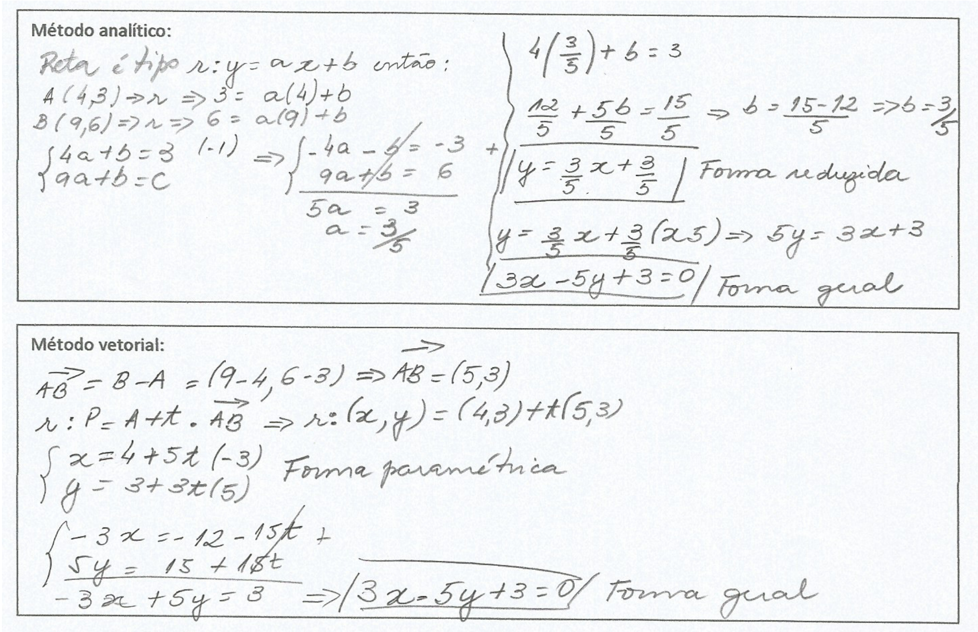
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

O vetorial é o mais rápido.

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

O vetorial é melhor por ser mais rápido.

Figura 2.6: Conclusão da atividade 3



Método analítico:

Reta é tipo $r: y = ax+b$ então:

$A(4,3) \Rightarrow r \Rightarrow 3 = a(4)+b$

$B(9,6) \Rightarrow r \Rightarrow 6 = a(9)+b$

$$\begin{cases} 4a+b=3 \quad (-1) \\ 9a+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a-\cancel{b}=-3 \\ 9a+\cancel{b}=6 \end{cases} +$$

$5a = 3$

$a = \frac{3}{5}$

$4\left(\frac{3}{5}\right)+b=3$

$\frac{12}{5}+\frac{5b}{5}=\frac{15}{5} \Rightarrow b = \frac{15-12}{5} \Rightarrow b = \frac{3}{5}$

$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$ Forma reduzida

$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \; (x5) \Rightarrow 5y = 3x+3$

$3x - 5y + 3 = 0$ Forma geral

Método vetorial:

$\vec{AB} = B - A = (9-4, 6-3) \Rightarrow \vec{AB} = (5,3)$

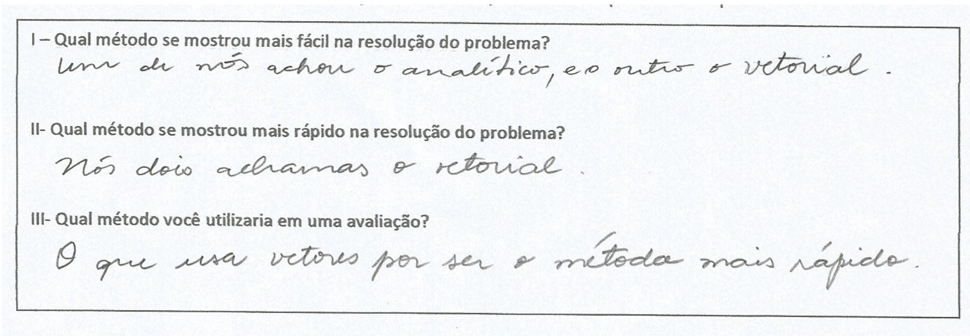
$r: P = A + t \cdot \vec{AB} \Rightarrow r: (x,y) = (4,3) + t(5,3)$

$$\begin{cases} x = 4+5t \quad (-3) \\ y = 3+3t \quad (5) \end{cases}$$ Forma paramétrica

$$\begin{cases} -3x = -12 - \cancel{15t} \\ 5y = 15 + \cancel{15t} \end{cases} +$$

$-3x + 5y = 3 \Rightarrow 3x - 5y + 3 = 0$ Forma geral

Figura 2.7: Solução atividade 4



I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

Um de nós achou o analítico, e o outro o vetorial.

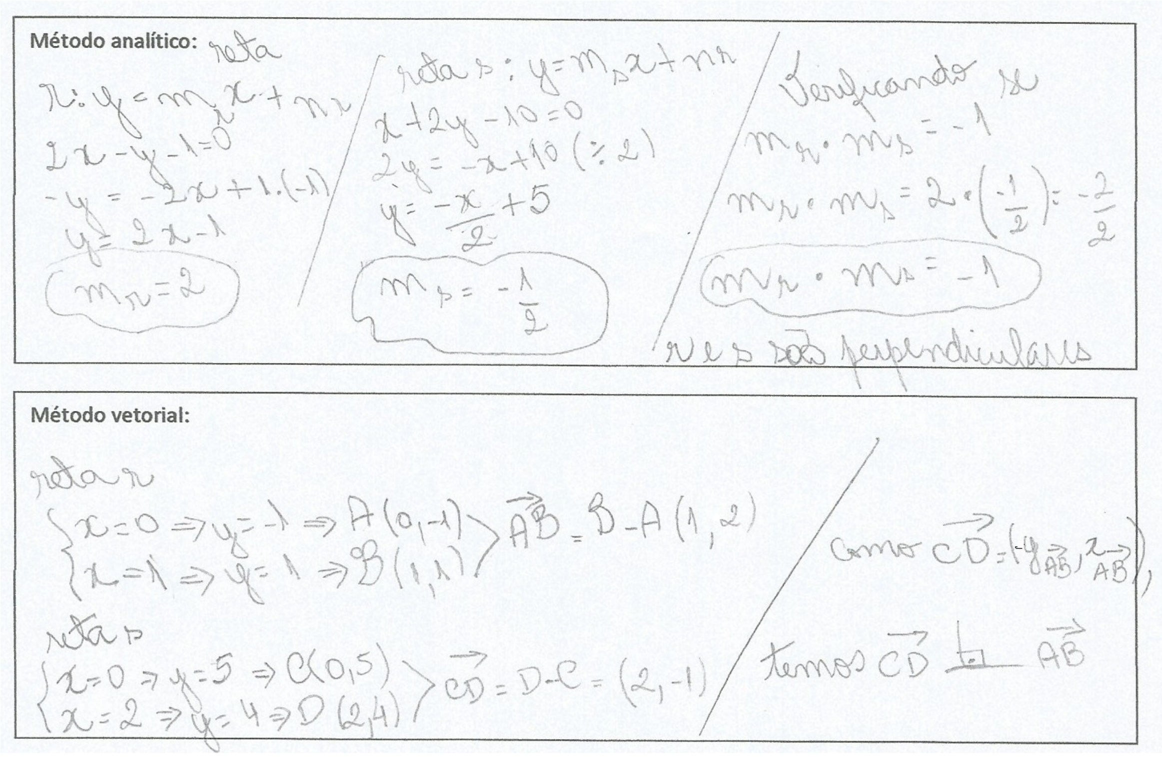
II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

Nós dois achamos o vetorial.

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

O que usa vetores por ser o método mais rápido.

Figura 2.8: Conclusão da atividade 4



Método analítico:

reta $r: y = m_r x + n_r$

$2x - y - 1 = 0$

$-y = -2x + 1 \cdot (-1)$

$y = 2x - 1$

$m_r = 2$

reta $s: y = m_s x + n_s$

$x + 2y - 10 = 0$

$2y = -x + 10 \; (\div 2)$

$y = \frac{-x}{2} + 5$

$m_s = -\frac{1}{2}$

Verificando se $m_r \cdot m_s = -1$

$m_r \cdot m_s = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2}$

$m_r \cdot m_s = -1$

r e s são perpendiculares

Método vetorial:

reta r

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0,-1) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1,1) \end{cases} \overrightarrow{AB} = B - A\,(1,2)$

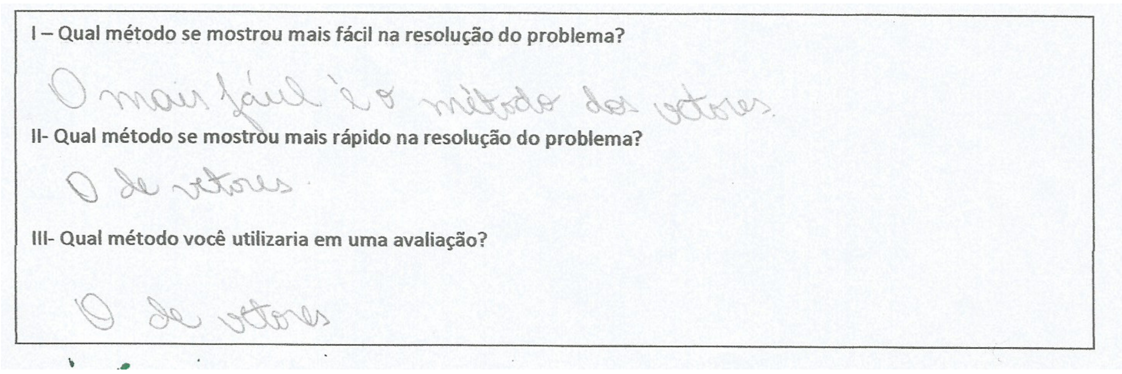
reta s

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow C(0,5) \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow D(2,4) \end{cases} \overrightarrow{CD} = D - C = (2,-1)$

Como $\overrightarrow{CD} = (-y_{\overrightarrow{AB}}, x_{\overrightarrow{AB}})$,

temos $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

Figura 2.9: Solução atividade 5



I – Qual método se mostrou mais fácil na resolução do problema?

O mais fácil é o método dos vetores.

II- Qual método se mostrou mais rápido na resolução do problema?

O de vetores.

III- Qual método você utilizaria em uma avaliação?

O de vetores

Figura 2.10: Conclusão da atividade 5

2.2 Conclusão a partir da experiência e das observações dos estudantes

De uma maneira geral pode ser observado que nesta escola, para esse grupo de estudantes, a utilização de vetores tornou a solução dos exercícios mais atrativas e rápidas.

Os alunos demonstraram durante as atividades estar muito interessados em uma maneira de resolver os problemas com rapidez e eficiência.

Quando desafiados, os alunos respondem com prestatividade e dedicação, e quando percebem que o que estão aprendendo tem alguma utilidade, ou traz alguma agilidade na resolução de problemas, o aprendizado se torna prazeroso.

3 Utilizando o Geogebra

Atualmente ensinar matemática tem se tornado uma tarefa cada vez mais difícil. Em primeiro lugar devido a ideia errada que a disciplina é difícil e enfadonha. Em segundo lugar, o desafio que o professor tem de estimular o interesse dos alunos que estão envolvidos com celulares e o uso descontrolado das redes sociais.

Motivar a sua participação durante as aulas é um desafio. A maioria dos estudantes possuem muitas dificuldades nas atividades propostas em sala de aula, devido a não assimilação dos conhecimentos prévios e também por não conseguirem aplicar os conteúdos no seu dia a dia. Assim, não reconhecem o sentido nas atividades propostas e não se preocupam com o estudo da matemática.

Especificamente a Geometria Analítica, é o conteúdo da matemática em que os alunos possuem muitas dificuldades, em grande parte porque é apresentado de forma abstrata, voltada para a resolução de exercícios. Sendo assim, os estudante não conseguem relacionar o que estudam com o seu cotidiano e nem com o região em que moram.

Desafiado então, o professor deve buscar meios dinâmicos e atrativos para ensinar de forma diferenciada, intencionando chamar a atenção dos estudantes.

A utilização de novas tecnologias, nesse caso a utilização do Geogebra, pode ajudar bastante o trabalho do professor em associar a teoria à prática e vice-versa, proporcionando uma aprendizagem verdadeira e sólida, envolvendo o interesse dos estudantes pelo novo estimulando a curiosidade e estreitando a relação professor e estudante.

Neste capítulo vamos utilizar o Geogebra na resolução de algumas atividades propostas aos alunos, onde será verificado que sua utilização auxilia de forma considerável o aprendizado e o desenvolvimento de conceitos de geometria analítica e a melhor compreensão da utilização de vetores.

As atividades desenvolvidas, embora simplistas, tem o objetivo de trazer o estudante para uma atividade diferenciada, e aqueles que realmente ficarem motivados, podem em outro momento desenvolver e ampliar o domínio do programa resolvendo atividades mais elaboradas.

A realidade dos estudantes das escolas públicas do estado do Rio de Janeiro é preocupante devido ao seu despreparo. Por esse motivo as atividades que seguem adiante, não oferecerem um grau de dificuldade elevado.

Encontrei estudantes que não sabiam ligar o computador, nem como usar o mouse. Para a maioria chegar ao final das atividades, representa vencer um gigantesco obstáculo.

Essa realidade não se faz presente na maioria das escolas particulares que trabalhei, pois o acesso as tecnologias e a informação é muito maior do que possuem os estudantes de escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro.

No primeiro exercício, **Qual a distância entre os pontos** $A(2,2)$ **e** $B(10,8)$**?**, basta digitar na "Entrada:", $(2,2)$ e enter para criar o ponto A.

Em seguida vamos criar o ponto B do mesmo modo, digitando na caixa "Entrada:", $(10,8)$ e depois teclar, enter.

Depois clicando no menu "retas", secionamos "segmento"e clicamos no ponto A e depois no ponto B. O programa automaticamente desenha o segmento AB, e mostra sua medida na "janela de álgebra".

O programa Geogebra dinamicamente calcula e desenha o segmento $\overline{AB}$, deixando o aluno mais curioso de sua utilização.

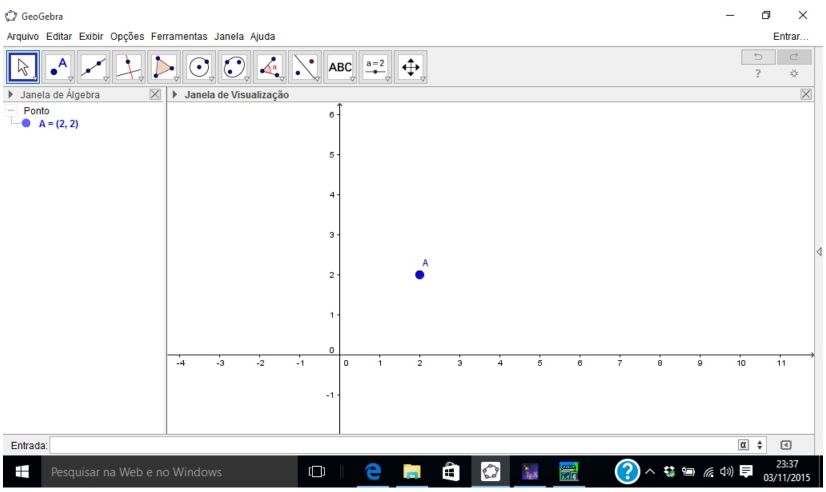


Figura 3.1: Criação do ponto A

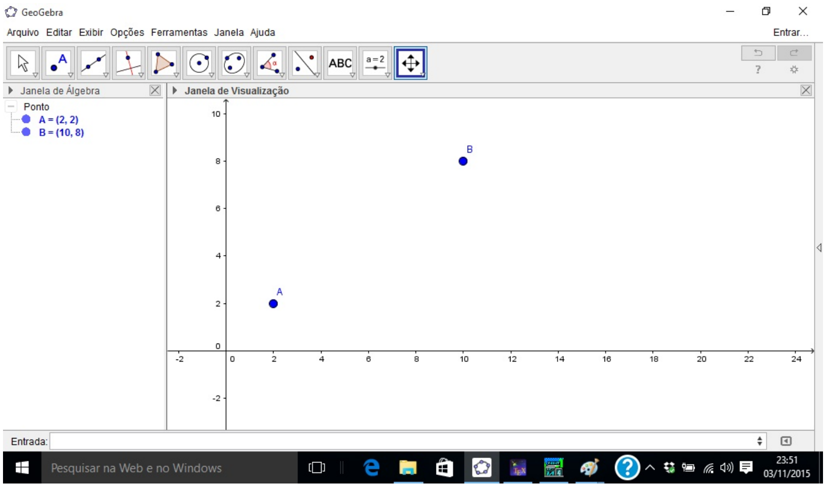


Figura 3.2: Criação do ponto B

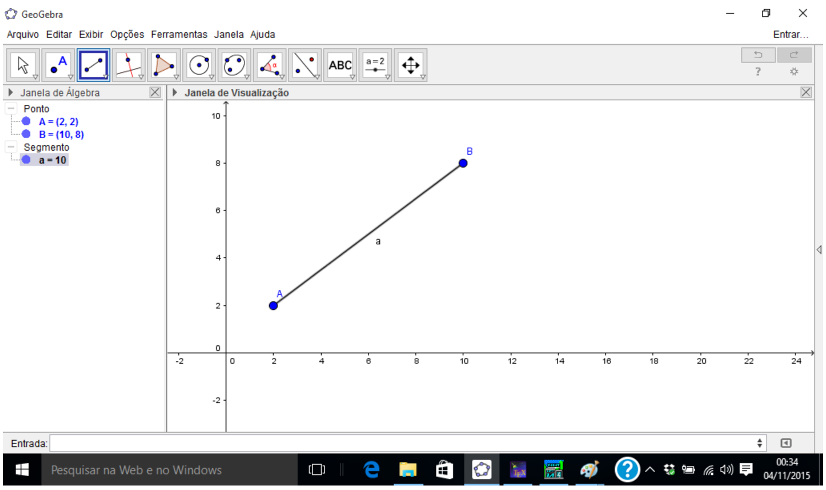


Figura 3.3: Criação do segmento AB

No segundo exercício, **"Calcule a área definida pelo triângulo formado pelos pontos $A(10, 8)$, $B(2, 2)$ e $C(10, 2)$ ".** Primeiramente na caixa "entrada", digitamos $(10, 8)$ e depois enter para criar o ponto A, $(2, 2)$, enter, para criar o ponto B e $(10, 2)$ para criar o ponto C.

Clicando no menu "segmento"e depois clicando em A e depois em B, o programa cria o segmento BC. Clicando em A e depois em C, o programa cria a segmento

AC e o triângulo fica destacado.

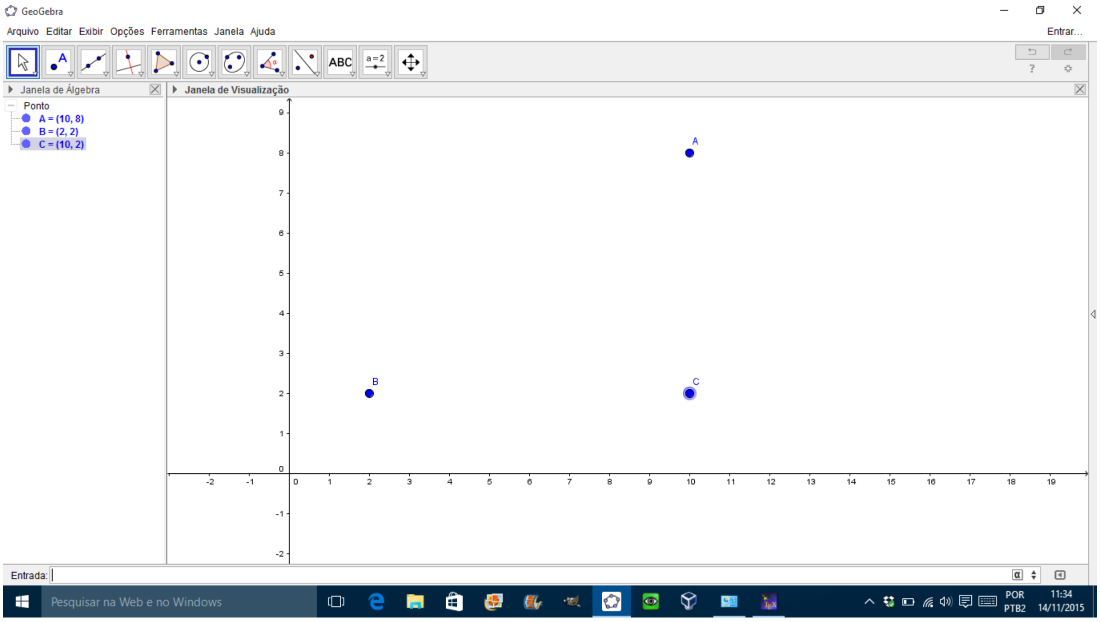
511.png 

Figura 3.4: Três pontos distintos

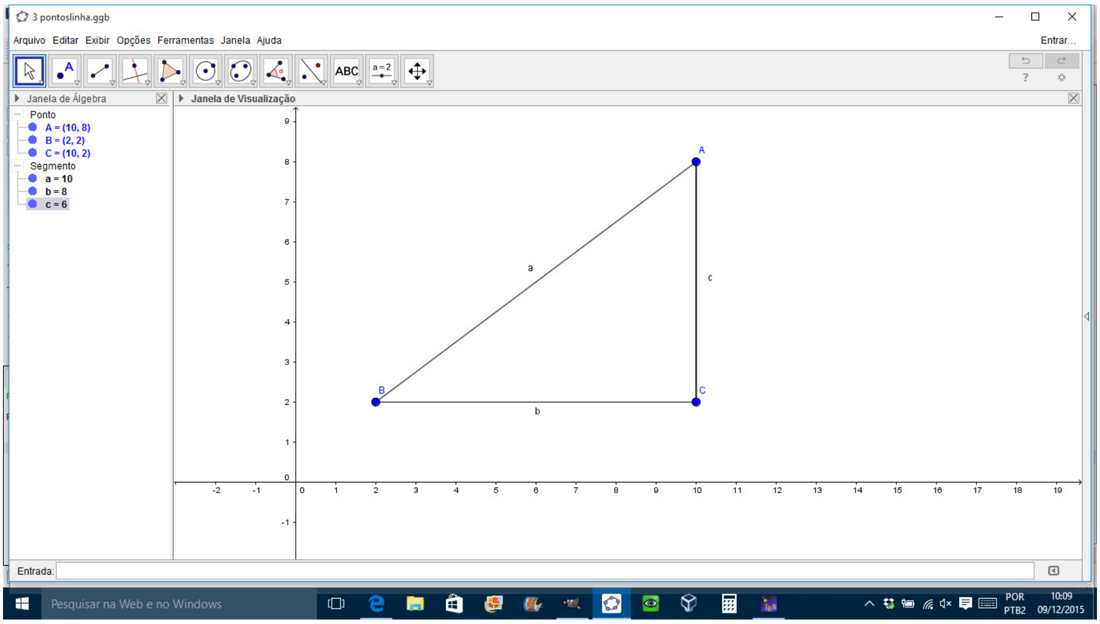


Figura 3.5: Triângulo ABC

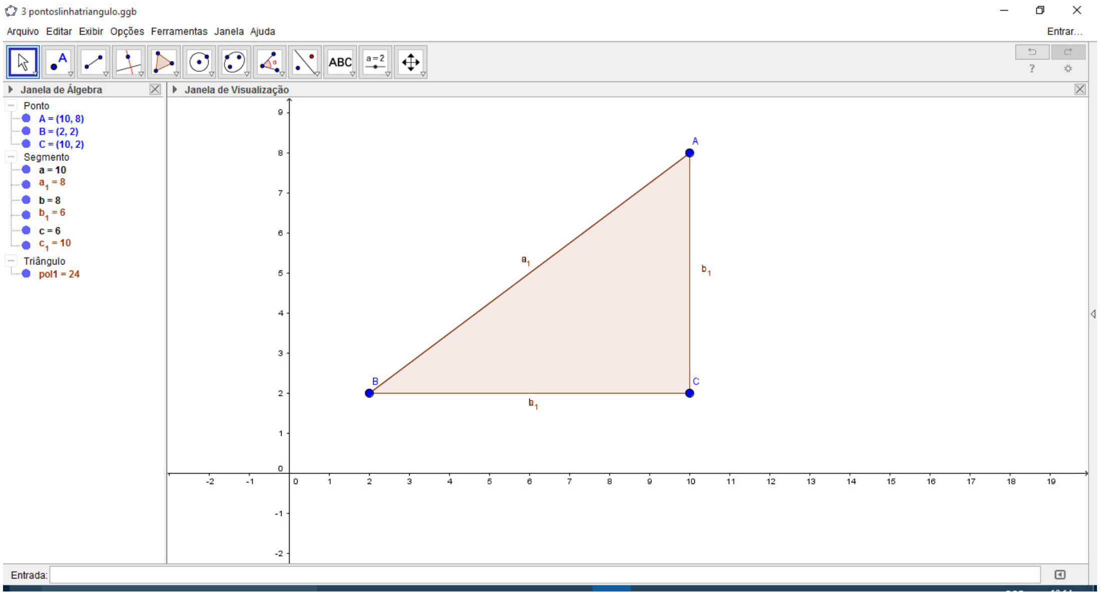


Figura 3.6: Superfície do triângulo ABC pelo Geogebra

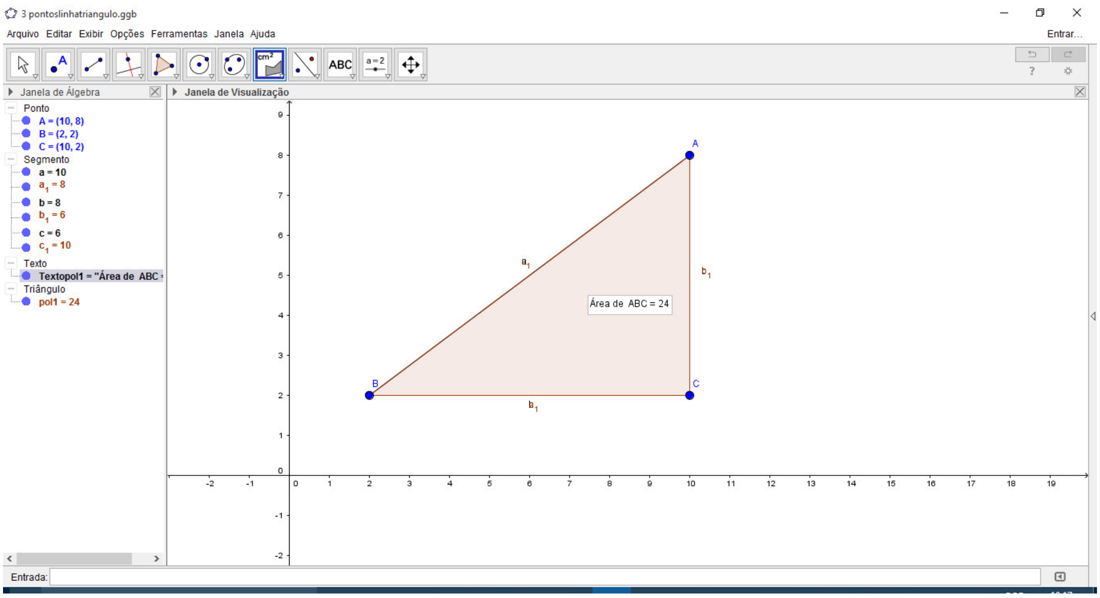


Figura 3.7: Área do triângulo ABC pelo Geogebra

4 Pesquisa com outros educadores

Com o intuito de verificar se outros educadores também compartilhavam do mesmo sentimento sobre a utilização de vetores no ensino médio no currículo de Matemática, realizei uma pesquisa solicitando que alguns colegas respondessem ao questionário abaixo. As perguntas foram enviadas por e-mail no dia 17 de janeiro de 2015.

Questionário

Estou destacando a importância de se aprender vetores de forma correta e detalhada no ensino médio, onde acredito ter um grande reflexo no aprendizado mais adiante tanto no ensino médio quanto no ensino superior em grandezas vetoriais, como força, velocidade, aceleração, etc.

Perguntas
1) Nome?
2) Instituição onde trabalhou/trabalha?
3) Tempo de docência ?
4) Em que/quais cursos?
5) Em sua experiência docente, que dificuldades encontrou quando o estudante se deparava com a necessidade de usar esses conceitos (vetores)?.
6) Que estratégias foram adotadas para facilitar esse aprendizado?
7) Em geral, os alunos apresentaram aproveitamento desejado?

4.0.1 Respostas do questionário

Docente A

Instituição onde trabalhou/trabalha	Instituto de Física da UFRJ
Tempo de docência	34 anos
Em que/quais cursos	Físicas 1, 2 e 3, Físicas Experimentais 1, 2, 3 e 4 e Introdução às Ciências Físicas 1 (EaD)
Em sua experiência docente, que dificuldades encontrou quando o estudante se deparava com a necessidade de usar esses conceitos (vetores)?	As disciplinas Física 1 e Física 3 são onde o problema da falta de conhecimento de vetores mais dificulta o aprendizado. O aluno que não consegue trabalhar com vetores não consegue resolver problemas de mecânica e de campos eletromagnéticos.
Que estratégias foram adotadas para facilitar esse aprendizado?	Explicar as principais características e as operações definidas para vetores antes de iniciar a matéria propriamente dita e, durante o curso, fazer o passo a passo das decomposições dos vetores nas bases escolhidas e das operações vetorias a cada exercício resolvido em sala.
Em geral, os alunos apresentaram aproveitamento desejado?	Somente os alunos que entendem as operações com vetores conseguem um bom aproveitamento nessas duas disciplinas mencionadas.

Docente B

Instituição onde trabalhou/trabalha	IFRJ; Colégio e Curso Miguel Couto; Loghus vestibulares; Colégio Nossa Senhora da Assunção; Colégio Gay-Lussac; MV1; etc.
Tempo de docência	20 anos
Em que/quais cursos	Técnico em Mio Ambiente; técnico em logística ambiental; técnico em informática; pré vestibular; ensino médio
Em sua experiência docente, que dificuldades encontrou quando o estudante se deparava com a necessidade de usar esses conceitos (vetores)?	A primeira dificuldade encontrada é a de possuírem algum conhecimento, por conta da disciplina de física, mas sem embasamento. Mas com toda certeza, a maior dificuldade é a quase exclusão desse conteúdo em exames de seleção para o 3º grau, isso faz o aluno, apesar de conseguir facilmente perceber a aplicação desse conteúdo no dia a dia, se desinteressar. As próprias escolas que sempre estão preocupadas com o resultado desses exames de seleção, colocam em segundo plano, ou até em momento virtual, tais conteúdos.
Que estratégias foram adotadas para facilitar esse aprendizado?	Exemplos de aplicações na física e aplicações no dia a dia.
Em geral, os alunos apresentaram aproveitamento desejado?	De modo geral, muito satisfatório. Geralmente acham o conteúdo mais fácil.

Docente C

Instituição onde trabalhou/trabalha	Bom Jesus
Tempo de docência	20 anos
Em que/quais cursos	Fundamental e Médio
Em sua experiência docente, que dificuldades encontrou quando o estudante se deparava com a necessidade de usar esses conceitos (vetores)?	Basicamente, eles não conseguem entender que certas grandezas necessitam de mais informações e que não basta apenas um número para representa-las. Normalmente, tentam dar como resposta somente um valor esquecendo de dizer as outras características.
Que estratégias foram adotadas para facilitar esse aprendizado?	Um facilitador é o uso da física com suporte, pois lá vemos o motivo de aprender vetores. Os exemplos dados na física são concretos e assim facilita o entendimento
Em geral, os alunos apresentaram aproveitamento desejado?	A maioria.

Docente D

Instituição onde trabalhou/trabalha	Colégio Pedro II - Campus Realengo II
Tempo de docência	24 anos
Em que/quais cursos	Ensino Fundamental e Médio
Em sua experiência docente, que dificuldades encontrou quando o estudante se deparava com a necessidade de usar esses conceitos (vetores)?	Os alunos possuem muita dificuldade em entender o significado das operações vetoriais. Muitos misturam operações escalares nas resoluções vetoriais. Outra dificuldade é o fato de que poucos conseguem relacionar os conceitos com os fenômenos físicos. Além disso, muitos se desinteressam em função desses conceitos não aparecerem nas principais provas de vestibulares.
Que estratégias foram adotadas para facilitar esse aprendizado?	Relacionar, desde as primeiras aulas, os conceitos às grandezas físicas. Mostrar aplicações concretas facilita o entendimento. Exemplo, soma vetorial pode ser vista como a busca da Força Resultante.
Em geral, os alunos apresentaram aproveitamento desejado?	Não, ainda assim o aproveitamento é relativo. Para aqueles que possuem dificuldade ou desinteresse o fator pouco tempo prejudica muito também.

5 Considerações finais

Levando em conta os resultados das atividades propostas a esse grupo de alunos, os resultados das entrevistas com os docentes, além de registros de pesquisas científicas, acredito que vale a pena incluir o estudo de vetores no ensino médio como auxiliar ao estudo da geometria analítica no terceiro ano do ensino médio.

A experiência que vivenciei mostrou que os estudantes ao serem desafiados demostram desenvoltura, curiosidade e disposição para resolverem novos desafios. Os alunos que participaram desse projeto desenvolveram a capacidade de se superar e alcançaram resultados muito expressivos nos exames de vestibular.

Ao estudarem um conceito que não tem na programação de escolas, principalmente as públicas, se sentiram estimulados, e com o aprendizado e resultados, sentiram-se recompensados pelo esforço dispendido.

O estudo de vetores também pode auxiliar no estudo da Física. Notadamente no ensino médio, grande parte dos estudantes sentem muitas dificuldades no estudo da Física. Estudar Física com o apoio da geometria vetorial, traz uma maior segurança e maior clareza na compreensão dos fenômenos físicos e sua aplicabilidade no dia a dia.

A utilização do software Geogebra foi muito bem aceita, despertando o interesse e a atenção dos alunos para as atividades. O Geogebra está disponível gratuitamente em várias plataformas, como computador e em aplicativo para celular. Atualmente, devido a popularização dos smartphones e o acesso à internet, existe grande possibilidade de sua ampla utilização. As escolas atualmente estão disponibilizando laboratórios de informática e até mesmo livre acesso à rede wi-fi em suas unidades.

Projetos como *Um livro aberto de Matemática* no qual ocorreu o desenvolvimento de um Capítulo dedicado ao estudo de vetores como um objeto matemático,e principalmente a nova Base Nacional Comum Curricular [2], dão alguma esperança de que a proposta defendida neste trabalho encontre algum lugar, seja nos livros didáticos ou ao menos em discussões nos conselhos de educação visando a inclusão do estudo de vetores, de forma mais profunda do que é realizada atualmente, no currículo minimo divulgado por secretarias de educação estaduais.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Davi Pereira Fortes, V *Volumes de sólidos de revolução no ensino médio: Uma abordagem dinâmica e intuitiva a partir das idéias do cálculo*, Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT,UFF, 2015.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – BNCC 2ª versão. Brasília, DF, 2016.

[3] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática Contexto e Aplicações*, Editora Ática, Vol. 3, Ed. 4, 2011.

[4] DELGADO, Jorge, *Geometria Analítica-Coleção Profmat*, SBM, Vol. Único, Rio de Janeiro, 2013.

[5] IEZZI, Gelson et al., *Matemática: Ciência e Aplicações*, Editora Saraiva, Vol.3, São Paulo, 2011.

[6] IEZZI, Gelson, *Geometria Analítica-coleção Fundamentos de Matemática Elementar*, Atual Editora, Vol. 7, São Paulo, 2013.

[7] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, IMPA, Vol. Único, Rio de Janeiro, 2014.

[8] LIMA, E. L. et al, Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[9] LIMA, E. L., *Geometria Analíica e Álgebra Linear*, IMPA, Vol. Único, Rio de Janeiro, 2013.

[10] LINS, R. C; GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. 4 ed. Campinas: Papirus Editora, 1997, 176 p.

[11] PAIVA, M., *Matemática*, Editora Moderna, Vol. 3, São Paulo, 2010.

[12] SANTOS, Lucidio da Silva, *Vetores: um conceito matemático*, Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT, UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.

[13] STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo, *Geometria Analítica 2 ed*, Makron Books, São Paulo, 1987.

[14] YOUSSEF, Antônio Nicolau, *Matemática: Ensino Médio*, Editora Scipione, Vol. Único, Ed. 1, 2009.

[15] TEIXEIRA, Ralph Costa, *Álgebra Linear Exercícios e Soluções*, IMPA, Vol. Único, Rio de Janeiro, 2014.

6 Anexos

"Matriz de Referência – Matemática – 3º ano do ensino médio"

	Descritores do Tema I. Espaço e Forma
D1	Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
D2	Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
D3	Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
D4	Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
D5	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, co-seno,tangente).
D6	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
D7	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
D8	Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
D9	Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
D10	Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

	Descritores do Tema II. Grandezas e Medidas
D11	Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
D12	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D13	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide,cilindro, cone, esfera).

	Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções
D14	Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D15	Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.
D16	Resolver problema que envolva porcentagem.
D17	Resolver problema que envolva equação de segundo grau.
D18	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
D19	Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau.
D20	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
D21	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
D22	Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.
D23	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.
D24	Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.
D25	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
D26	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.
D27	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
D28	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
D29	Resolver problema que envolva função exponencial.
D30	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, co-seno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
D31	Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.
D32	Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
D33	Calcular a probabilidade de um evento.

	Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação
D34	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D35	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

	Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções
D14	Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D15	Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.
D16	Resolver problema que envolva porcentagem.
D17	Resolver problema que envolva equação de segundo grau.
D18	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
D19	Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau.
D20	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
D21	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
D22	Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.
D23	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.
D24	Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.
D25	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
D26	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.
D27	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
D28	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
D29	Resolver problema que envolva função exponencial.
D30	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, co-seno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
D31	Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.
D32	Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
D33	Calcular a probabilidade de um evento.

	Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação
D34	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D35	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

1º Bimestre

Campo Numérico Aritmético	Análise Combinatória e Introdução à probabilidade
Habilidades e Competências	- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples. - Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas. - Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos. - Calcular a probabilidade de um evento.

2º Bimestre

Campo Numérico Aritmético	Probabilidade
Habilidades e Competências	- Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares - Resolver problemas envolvendo probabilidade condicional.
Campo do Tratamento da Informação	**Estatística: medidas de centralidade e dispersão**
Habilidades e Competências	- Compreender os conceitos básicos de estatística: população, amostra, frequência absoluta e frequência relativa. - Construir, ler e interpretar histogramas, gráficos de linhas, de barras e de setores. - Resolver problemas envolvendo o cálculo da média aritmética, mediana e moda. - Resolver problemas envolvendo cálculo de desvio-padrão.

ESTADO DO RIO DE JANEIRO

3º Bimestre

Campo Algébrico Simbólico	Números Complexos
Habilidades e Competências	- Identificar e conceituar a unidade imaginária. - Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica. - Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica. - Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.
Campo Geométrico	**Geometria analítica**
Habilidades e Competências	- Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos. - Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.

4º Bimestre

Campo Algébrico Simbólico	Polinômios e Equações Algébricas
Habilidades e Competências	- Identificar e determinar o grau de um polinômio. - Calcular o valor numérico de um polinômio. - Efetuar operações com polinômios. - Utilizar o teorema do resto para resolver problemas. - Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios . - Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da Decomposição. - Representar graficamente uma função polinomial. - Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.
Campo Geométrico	**Geometria analítica**
Habilidades e Competências	- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações. - Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral,conhecidos o centro e o raio.

ESTADO DO RIO DE JANEIRO