

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luís Felipe Bezerra Pereira

**Uma introdução ingênua à teoria de resposta ao item.**

Rio de Janeiro

2018

Luís Felipe Bezerra Pereira

**Uma introdução ingênua à teoria de resposta ao item.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: José Teixeira Cal Neto

Doutor em  
matemática pela Pontifícia  
Universidade Católica do Rio  
de Janeiro

Rio de Janeiro

2018

Luís Felipe Bezerra Pereira

**Uma introdução ingênua à teoria de resposta ao item.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em \_\_\_\_/\_\_\_\_/2018

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. José Teixeira Cal Neto – Orientador (UNIRIO)

---

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes (UNIRIO)

---

Prof. Dr. Chistiane Sertã Costa (PUC - Rio)

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus; depois, à minha esposa, que me deu apoio incondicional, às minhas filhas, que sempre tiveram paciência para entender os momentos de ausência e aos meus pais, por todo o suporte e ajuda nos momentos difíceis, para que fosse possível me dedicar ao longo dessa incrível jornada.

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*

**BERTRAND RUSSELL**

## **Agradecimentos**

A Deus, por me iluminar e me dar saúde para poder sustentar os momentos difíceis.

A minha esposa Ana Paula, meu porto seguro, que sempre me deu força para continuar estudando.

As minhas filhas, Isabela e Júlia, por toda a paciência e compreensão nos momentos de ausência, durante os dias de estudos.

A minha família, em especial aos meus pais, Jorge Felipe e Conceição de Maria, por todo apoio dado durante esse período.

Ao meu orientador José Teixeira Cal Neto, por toda sua paciência comigo e por acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos do mestrado, que me ajudaram ao longo do curso.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

## **Resumo**

Este trabalho tem como objetivo mostrar as possibilidades e as vantagens oferecidas pela utilização da Teoria de Resposta ao Item (TRI) em relação ao método tradicionalmente usado - teoria clássica dos testes (TCT) - nas escolas de ensino fundamental e médio do Brasil. A TRI já é uma grande conhecida de alguns países, por exemplo dos Estados Unidos, e é frequentemente aplicada nas avaliações de larga escala. Atualmente, no Brasil, a TRI vem sendo aplicada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Faremos o estudo desse modelo a partir de recursos computacionais, em particular o software Maple e o Excel. A fim de facilitar o entendimento, faremos simulações de pequenos testes envolvendo a TRI; casos esses que serão de suma importância para o entendimento da teoria. O software Maple nos permitiu a análise das curvas características dos itens (CCI) nos gráficos, em duas e três dimensões; além de possibilitar a estimação das habilidades. Um simulado ENEM foi aplicado a 153 alunos de escolas públicas e privadas e suas notas foram calculadas de modo simples usando a TRI, com o auxílio de um complemento no software Excel. Tal complemento possibilita a oportunidade do professor construir as notas de seus alunos usando a TRI. Assim, a melhor maneira encontrada foi usando um complemento para o Excel.

Palavras-Chave: Teoria de Testes, TRI, TCT

## **Abstract**

This work aims to show the possibilities and advantages offered by the use of Item Response Theory (IRT) in relation to the traditionally used method, classical theory of tests (CTT), in primary and secondary schools in Brazil. The IRT is already widely used in some countries, for example of the United States, and is often applied in large scale assessments. Currently in Brazil IRT has been applied in the Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). We will study this model from computational resources, in particular Maple software and Excel. In order to facilitate understanding, we will do simulations of small tests involving IRT, which will be extremely important. The Maple software allowed us to analyze the item characteristic curves (ICC) in the graphs in two and three dimensions, besides allowing the estimation of the abilities. A simulated ENEM test was applied to 153 students from public and private schools and their scores were computed by using IRT, via an add-in of the Excel software. Such a tool enables the teacher to grade their students using IRT, with a software that is easily obtained.

**Keywords:** Test Theory, IRT, CTT



## Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2. O MODELO UNIDIMENSIONAL DE TRÊS PARÂMETROS (ML3) .....</b>	<b>15</b>
<b>2.1 PARÂMETROS DOS ITENS E FUNÇÃO DE RESPOSTA DO ITEM ..</b>	<b>15</b>
<b>3. USO DO SOFTWARE MAPLE PARA ANÁLISE DA FRI E AS CCI .....</b>	<b>17</b>
<b>3.1 ANÁLISE DOS PARÂMETROS COM AUXÍLIO DO MAPLE .....</b>	<b>18</b>
<b>3.2 MODIFICANDO O PARÂMETRO B E MANTENDO FIXOS A E C.....</b>	<b>20</b>
<b>3.3 MODIFICANDO O PARÂMETRO A E MANTENDO FIXOS B E C ....</b>	<b>21</b>
<b>3.4 MODIFICANDO O PARÂMETRO C E MANTENDO FIXOS B E A ....</b>	<b>22</b>
<b>4. ANÁLISE 2D MANTENDO A FIXO E VARIANDO B .....</b>	<b>23</b>
<b>4.1 UM INDIVÍDUO E DOIS ITENS .....</b>	<b>23</b>
<b>4.2 UM INDIVÍDUO, TRÊS ITENS E UM ACERTO .....</b>	<b>25</b>
<b>4.3 UM INDIVÍDUO, TRÊS ITENS E DOIS ACERTOS.....</b>	<b>28</b>
<b>4.4 UM INDIVÍDUO, TRÊS ITENS E TRÊS ACERTOS.....</b>	<b>31</b>
<b>4.5 UM INDIVÍDUO, TRÊS ITENS E TRÊS ERROS .....</b>	<b>32</b>
<b>5. ATRIBUINDO HABILIDADES, DADO UM RESULTADO .....</b>	<b>34</b>
<b>5.1 ANÁLISE 3D MANTENDO A FIXO E VARIANDO B .....</b>	<b>34</b>
<b>5.1.1 T1 E T2 ACERTAM TODOS OS ITENS .....</b>	<b>36</b>
<b>5.1.2 T1 E T2 ERRAM TODOS OS ITENS .....</b>	<b>37</b>
<b>5.1.3 T1 E T2 ERRAM UM ITEM .....</b>	<b>38</b>
<b>5.1.4 T1 E T2 ERRAM DOIS ITENS .....</b>	<b>39</b>
<b>5.1.5 T1 E T2 ACERTAM DOIS ITENS .....</b>	<b>42</b>
<b>5.2 ANÁLISE 3D MANTENDO B FIXO E VARIANDO A .....</b>	<b>45</b>
<b>5.2.1 T1 E T2 ACERTAM DOIS ITENS .....</b>	<b>46</b>
<b>5.2.2 T1 E T2 ERRAM DOIS ITENS .....</b>	<b>48</b>
<b>5.2.3 T1 E T2 ERRAM QUATRO ITENS .....</b>	<b>50</b>

<b>6. ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DOS ITENS QUANDO SÓ CONHECEMOS OS PADRÕES DE RESPOSTA E USAMOS VALORES PROVISÓRIOS PARA AS HABILIDADES .....</b>	<b>54</b>
<b>7. APLICAÇÃO DA TRI COM O USO DO EXCEL .....</b>	<b>56</b>
<b>7.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS ITENS .....</b>	<b>61</b>
<b>7.2 ESTIMAÇÃO DAS HABILIDADES .....</b>	<b>64</b>

## Lista de Gráficos

Gráfico 01 – Curva característica do item (CCI) .....	18
Gráfico 02 – Curva CCI, ponto de Inflexão .....	19
Gráfico 03 – Curva CCI, reta tangente ao ponto de Inflexão .....	20
Gráfico 04 – Curva CCI, modificando o parâmetro $b$ e mantendo $a$ e $c$ fixos .....	21
Gráfico 05 – CCI, modificando o parâmetro $a$ e mantendo $b$ e $c$ .....	21
Gráfico 06 – CCI, variação de probabilidade .....	22
Gráfico 07 – CCI, modificando o parâmetro $c$ e mantendo fixos $b$ e $a$ .....	22
Gráfico 08 – CCIs, construída com os resultados da tabela .....	23
Gráfico 09 – Construída com os resultados da tabela 02 .....	24
Gráfico 10 – Construída com os resultados da tabela 03 .....	26
Gráfico 11 – Construída com os resultados da tabela 04 .....	27
Gráfico 12 – Construída com os resultados da tabela 05 .....	28
Gráfico 13 – Construída com os resultados da tabela 06 .....	29
Gráfico 14 – Construída com os resultados da tabela 07 .....	30
Gráfico 15 – Construída com os resultados da tabela 08 .....	31
Gráfico 16 – Construída com os resultados da tabela 09 .....	32
Gráfico 17 – Construída com os resultados da tabela 10 .....	33
Gráfico 18 – Curvas CCI, mantendo “ $a$ ” fixo e variando .....	35
Gráfico 19 – Construída com as informações da tabela 11 .....	36
Gráfico 20 – Construída com as informações da tabela 12 .....	37
Gráfico 21 – Construída com os resultados da tabela 13 .....	38
Gráfico 22 – Ponto máximo finito .....	39
Gráfico 23 – Construída com as informações da tabela 14 .....	40
Gráfico 24 – Estimação da habilidade.....	40
Gráfico 25 – Ponto de máximo finito .....	41
Gráfico 26 – Construída com as informações da tabela 115 .....	42
Gráfico 27 – Estimação da habilidade.....	43
Gráfico 28 – Ponto máximo finito .....	44
Gráfico 29 – CCI, aumentando o parâmetro “ $a$ ” .....	45
Gráfico 30 – Construída com as informações da tabela 16 .....	46
Gráfico 31 – Estimação da habilidade.....	47
Gráfico 32 – Ponto máximo finito .....	47
Gráfico 33 – Construída com as informações da tabela 17 .....	48
Gráfico 34 – Estimação da habilidade.....	49
Gráfico 35 – Ponto máximo finito .....	49
Gráfico 36 – Construída com as informações da tabela 18 .....	50
Gráfico 37 – Ponto máximo finito .....	51
Gráfico 38 – CCIs dos 45 itens .....	69

## **Lista de Tabelas**

Tabela 01 .....	23
Tabela 02 .....	24
Tabela 03 .....	25
Tabela 04 .....	26
Tabela 05 .....	28
Tabela 06 .....	28
Tabela 07 .....	29
Tabela 08 .....	30
Tabela 09 .....	31
Tabela 10 .....	32
Tabela 11 .....	36
Tabela 12 .....	37
Tabela 13 .....	38
Tabela 14 .....	39
Tabela 15 .....	41
Tabela 16 .....	46
Tabela 17 .....	48
Tabela 18 .....	50
Tabela 19 .....	52
Tabela 20 – Tabela completa contendo os parâmetros estimados .....	62
Tabela 21 – TCT x TRI .....	64

## **Lista de Figuras**

Figura 01 – Planilha com os resultados do simulado .....	55
Figura 02 – Início do suplemento .....	56
Figura 03 – Itens dicotômicos .....	56
Figura 04 – Seleção do modelo de três parâmetros .....	57
Figura 05 – Seleção das funções .....	58
Figura 06 – Estatística clássica dos testes .....	59
Figura 07 – Score .....	59
Figura 08 – Estimação dos parâmetros dos itens .....	60
Figura 09 – Os parâmetros estimados .....	61

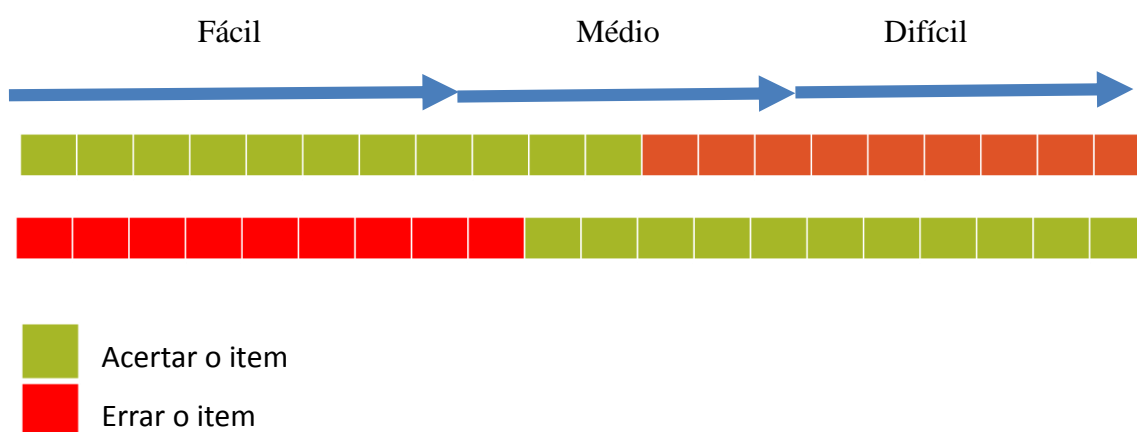
## 1 Introdução.

Sem dúvida, uma das grandes perguntas que nos fazemos é ‘Qual a melhor forma de avaliar?’

A avaliação, em si, é um tema sempre muito discutido entre educadores e pesquisadores. É muito comum, nas escolas, vermos alunos com a mesma nota e habilidades muito diferentes, pois, normalmente, o que é observado é o escore bruto de acertos e não o que cada indivíduo sabe de fato. Uma das grandes dificuldades é encontrar um método que seja eficiente e capaz de medir com exatidão o conhecimento de um indivíduo.

Vamos imaginar um teste com 20 itens em escala crescente de dificuldade, como no caso do ENEM, em que cada item contenha 5 alternativas de A a E, e para este teste escolheremos dois indivíduos para responder a esses itens.

Na imagem abaixo, estão ilustrados os padrões de resposta dos dois indivíduos. É possível observar que ambos obtiveram o mesmo número de acertos, tendo o primeiro acertado os 11 primeiros itens (os mais fáceis) e errado os 9 últimos (os mais difíceis); já o segundo indivíduo obteve um padrão de resposta totalmente contrário do primeiro, errando os 11 itens mais fáceis.



Nesse caso, ambos os indivíduos acertaram o mesmo número de questões, logo pela teoria clássica dos testes suas notas seriam iguais, porém analisando os padrões de resposta, notamos que não é razoável que o segundo indivíduo acerte os itens mais fáceis e erre os mais difíceis, então podemos considerar que ele obteve acertos casuais, ou seja, o que é comumente conhecido como “chute”.

Visando suprir as limitações da teoria clássica dos testes (TCT), em que cada item tem uma pontuação independente do outro – a nota seria simplesmente o número de itens acertados –, a Teoria de Resposta ao Item (TRI) leva em conta quais itens foram acertados; ou seja, acertar o mesmo número de itens não garante uma mesma nota a candidatos distintos. Para melhor avaliar, precisamos de métodos mais qualitativos do que quantitativos, como explica Demo:

A avaliação qualitativa pretende ultrapassar a avaliação quantitativa, sem dispensar esta. Entende que, no espaço educativo, os processos são mais relevantes que os produtos, não fazendo jus à realidade, se reduzida apenas às manifestações empiricamente mensuráveis. Podemos definir melhor o que seria educação de qualidade. Deveria dispor de duas virtudes mais frontais: de um lado, construir a capacidade de reconstruir conhecimento, para que o sujeito domine a arma mais potente de inovação e intervenção na sociedade e na realidade; de outro, fundamentar e exercitar a cidadania (DEMO, 2005, p. 111).

O objetivo da TRI é justamente tornar as avaliações mais qualitativas, uma vez que o desempenho do indivíduo, que responde a uma avaliação, é analisado a partir de cada item aplicado, e somente ao fim desse processo é quantificado numa escala métrica. Os itens na TRI buscam analisar os traços latentes de um indivíduo e de acordo com Moreira Júnior:

Traços latentes são características do indivíduo que não podem ser observadas diretamente, isto é, não existe um aparelho capaz de medi-las diretamente, como, por exemplo, um termômetro que mede diretamente a temperatura. Portanto, essas características são mensuradas através de variáveis secundárias que sejam relacionadas com o traço latente em estudo (MOREIRA JÚNIOR, 2010, p. 137).

Neste trabalho, faremos muitas simulações de pequenos testes, com auxílio do software Maple e utilizando o Método da Máxima Verossimilhança. O objetivo é analisar os padrões de respostas de indivíduos diferentes e comparar suas notas.

A TRI surgiu na década de 1950, porém só pôde ser utilizada em sua plenitude no final da década de 1970, com o avanço dos computadores e softwares, pois os cálculos e as análises de dados eram muito complexas. Desde então, a TRI vem sendo utilizada com frequência nas avaliações que são de múltipla escolha em todo o mundo. Nos Estados Unidos, a TRI é utilizada no SAT (Scholastic Aptitude Test), o “Enem americano”, haja vista que sua realização é obrigatória para alunos que pretendem cursar universidades americanas; e também pelo exame de proficiência em língua inglesa Toefl (Test of English as Foreign Language). No Brasil, a TRI foi usada em 1995 nas provas do Sistema

Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) do INEP/MEC, do governo federal, para medir o desempenho de estudantes do ensino básico (fundamental e médio). Em 2009, ganhou maior notoriedade, quando passou a ser usada pelo Enem com o objetivo de garantir a comparação das notas do exame daquele ano com os seguintes. Uma outra avaliação de peso que usa a TRI é o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), também aplicado no Brasil.

## 2 O modelo unidimensional de três parâmetros (ML3)

A TRI é uma teoria que trabalha com itens dicotômicos e não dicotômicos. Aqui trataremos do primeiro caso, que apresenta somente dois resultados (certo ou errado). E com o modelo unidimensional, assim chamado por só verificar um único traço latente - habilidade. A TRI é dividida em três modelos logísticos, os de um, dois ou três parâmetros: ML1, ML2 e ML3 respectivamente.

Este trabalho tratará deste último modelo, o ML3.

### 2.1 Parâmetros dos Itens e função de resposta do item.

O modelo logístico unidimensional de 3 parâmetros (ML3) é atualmente o mais utilizado e é, segundo Andrade, Tavares e Valle (2000, p.9), caracterizado pelo fato de respostas de uma mesma pessoa a itens diferentes serem independentes, bem como respostas de pessoas diferentes ao mesmo item também. Além disso, a probabilidade de uma pessoa, digamos o indivíduo  $j$ , acertar o item  $i$ , assumindo que sua habilidade (o único traço seu a ser medido) é o número real  $\theta_j$ , é dada por

$$P(U_{ij} = 1 | \theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Dai(\theta_j - b_i)}}$$

Com  $i = 1, 2, \dots, I$  e  $j = 1, 2, \dots, n$  onde:

$U_{ij}$  é uma variável dicotômica que assume os valores 1, quando o indivíduo  $j$  responde corretamente o item  $i$ , ou 0 quando o indivíduo  $j$  não responde corretamente ao item  $i$ .

$\theta_j$  representa a habilidade (traço latente) do  $j$ -ésimo indivíduo.

$P(U_{ij} = 1 | \theta_j)$  é a probabilidade de um indivíduo  $j$  com habilidade  $\theta_j$  responder corretamente ao item  $i$  e é chamada de *Função de Resposta do Item – FRI*, também denotada neste trabalho por  $f(t)$ .

$b_i, a_i$  e  $c_i$  são parâmetros do item  $i$ . O subíndice  $i$  chama atenção ao fato de que os parâmetros se referem a um item específico (itens distintos têm, em geral, parâmetros distintos).

$D$  é um fator de escala, constante e igual a 1. Utiliza-se o valor 1,7 quando é desejável que a função logística forneça resultados semelhantes ao da função ogiva normal.

Vamos agora falar sobre os três parâmetros do método:

#### Parâmetro $b$

É o parâmetro de *dificuldade* (ou de *posição*) de um item. Dita a habilidade que um indivíduo necessita para responder razoavelmente bem ao item – a rigor, com probabilidade de acerto igual a  $\frac{1+c}{2}$ . Assim, caso uma pessoa precise de uma habilidade elevada para responder bem a um item, é porque o mesmo apresenta uma dificuldade elevada. O oposto também ocorre, itens com baixa dificuldade devem exigir pouca habilidade do respondente. Este é um parâmetro que está na mesma escala da habilidade do respondente, que será medida na avaliação.

#### Parâmetro $a$

É o parâmetro de *discriminação* de um item, capaz de distinguir o nível de habilidade de cada respondente. Este parâmetro - que deve ser positivo - , quando apresenta um valor elevado, dilata diferenças pequenas nas habilidades de candidatos distintos. Valores baixos de  $a$ , por sua vez, fazem com que diferentes habilidades tenham chances de acerto parecidas, não distinguindo de modo justo os traços latentes. Idealmente, este comportamento se dá em uma vizinhança da habilidade  $b$ , como será visto com mais detalhes adiante. Na verdade, o parâmetro é proporcional à inclinação da reta tangente ao gráfico da função de resposta ao item no ponto  $\theta = b$ , como será ilustrado mais adiante. Esse é um parâmetro que está presente nos modelos (ML2) e (ML3) da TRI citados anteriormente.



Parâmetro c

É o parâmetro de *acerto casual* de um item. Em uma prova de múltipla escolha, um candidato sempre pode responder ao acaso. O parâmetro c é justamente a probabilidade desta escolha ao acaso ser a correta – como se trata de uma probabilidade, deve estar entre 0 e 1. Em um item com 5 alternativas, um valor razoável de c seria 1/5. Mais adiante faremos algumas contas ilustrando isto.

Os modelos ML1 e ML2 são casos particulares do modelo ML3. Seus parâmetros são também parâmetros de ML3, sendo que um ou dois dos demais parâmetros tem um valor arbitrado.

### 3 Uso do software Maple para análise da FRI e as CCI's.

Sendo a função de resposta do item  $f(\theta_j) = P(U_{ij} = 1|\theta_j)$  uma probabilidade, seus valores vão variar de zero (0) a um (1); o que já não acontece com a habilidade do indivíduo ( $\theta_j$ ), que em teoria pode ter qualquer valor de  $-\infty$  até  $+\infty$ , o que também ocorrerá para o parâmetro de dificuldade ( $b$ ), uma vez que o mesmo se encontra na própria escala de  $\theta_j$ .

Com auxílio do software Maple\*, vamos ilustrar alguns dos fatos comentados acima:

Usando t como a variável para habilidade, podemos definir

**> f:=t->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a\*(t-b)));**

$$f:=t \rightarrow c + \frac{1-c}{1+e^{-a(t-b)}}$$

O programa calcula limites em função de parâmetros, mas como os resultados dos limites no infinito dependem do sinal do parâmetro a, temos que restringir seus valores:

**> assume(a>0);**

Verificando que o parâmetro c é a probabilidade de acerto de um indivíduo de habilidade infinitamente baixa:

**> limit(f(t),t=-infinity);**

c

Analogamente, uma habilidade infinitamente alta, corresponde a uma probabilidade 1 de acerto:

> **limit(f(t),t=infinity);**

1

Calculando a derivada de f, temos:

> **D(f)(t);**

$$\frac{(1 - c) a e^{(-a(t-b))}}{(1 + e^{(-a(t-b))})^2}$$

É fácil ver que a expressão acima é sempre positiva ( $a > 0$ ,  $0 < c < 1$ ) e, portanto f é uma função crescente da habilidade. Assim, quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto.

Este fato pode ser visualizado ao esboçarmos o gráfico de uma FRI específica. Este gráfico é denotado por Curva Característica do Item (CCI). Usando para os parâmetros  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0,2$ , temos:

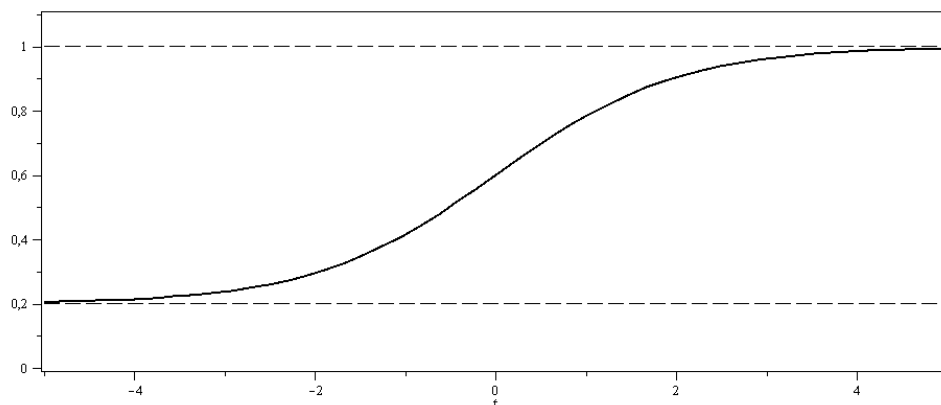


Gráfico 01

\*Maple é um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões.

### 3.1 Análise dos parâmetros com auxílio do Maple.

Vamos agora olhar para cada um dos três parâmetros com ajuda do Maple.

Parâmetro  $b$ :

Calculando a segunda derivada da FRI em questão, no Maple, obtemos

>**D(D(f));**

$$t \rightarrow \frac{2(1-c)a^2(e^{-a(t-b)})^2}{(1+e^{-a(t-b)})^3} - \frac{(1-c)a^2e^{-a(t-b)}}{(1+e^{-a(t-b)})^2}$$

E, portanto, no ponto  $b$ :

>**D(D(f))(b);**

- 0 Ou seja, o ponto de habilidade  $b$  é um ponto de inflexão da curva (a rigor seria necessário verificar que o sinal da segunda derivada se altera em  $b$ , mas isto ocorre de fato).
- 0 Para ilustrar a mudança de concavidade, podemos marcar o ponto  $(b, f(b))$  no gráfico da função (assumimos aqui  $a = 1, b = 0, c = 0.2$ ):

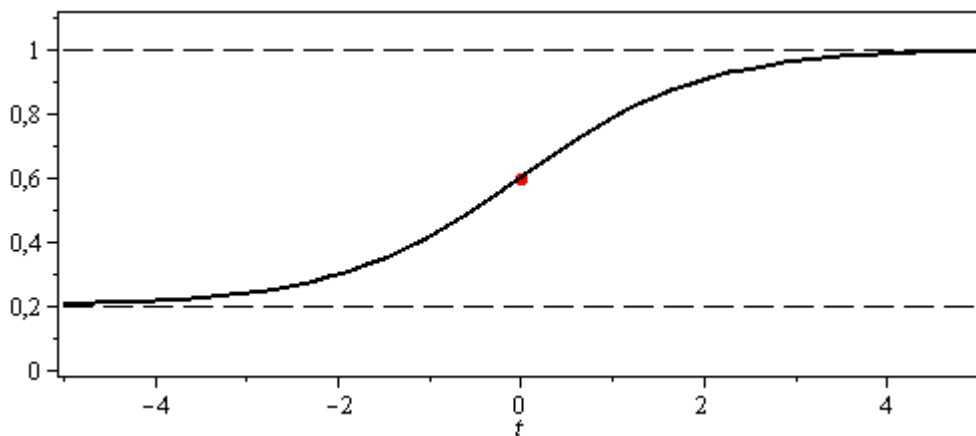


Gráfico 02

Parâmetro  $a$

Seu valor é proporcional à inclinação da reta tangente à CCI em  $b$ , seu ponto de inflexão.

Calculando a derivada de  $f$  (a FRI em questão), no ponto  $\theta_j = b_i$ , temos que:

>**df:=D(f);**

$$df := t \rightarrow \frac{(1-c)a e^{-a(t-b)}}{(1+e^{-a(t-b)})^2}$$

> **df(b);**

$$\frac{1}{4} (1 - c) a \sim$$

O parâmetro  $a$  é proporcional à inclinação da curva no ponto de inflexão, o que é consistente com nossa explicação sobre o mesmo, dada acima. Novamente, em uma figura, vemos a CCI, bem como a reta tangente à curva no ponto de inflexão:

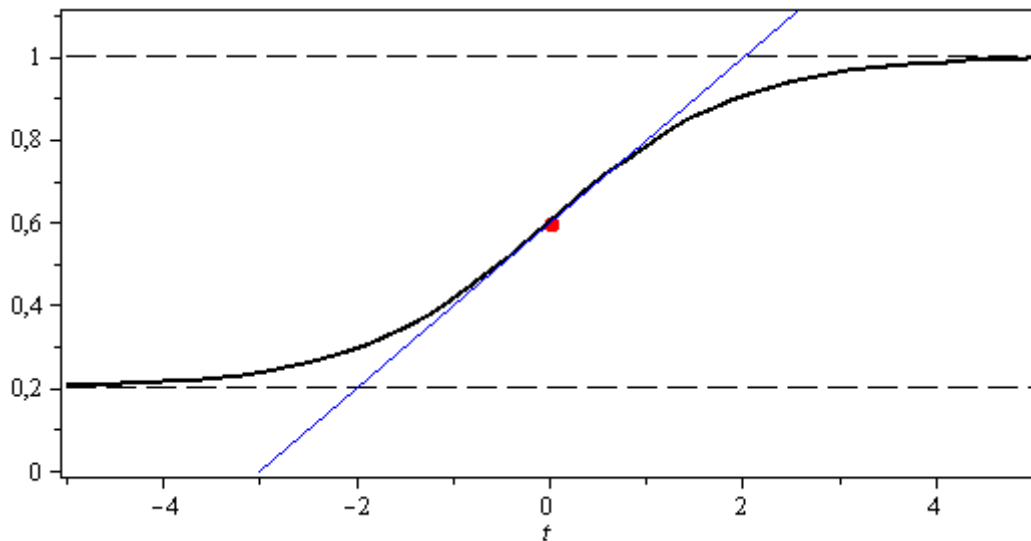


Gráfico 03

### 3.2 Modificando o parâmetro $b$ e mantendo fixos $a$ e $c$ .

Como a dependência de  $f$  em  $b$  é via  $(t - b)$ , é fácil ver que aumentando o valor do parâmetro (mantidos os valores dos outros parâmetros), o gráfico é transladado para direita, como ilustrado na figura a seguir. Deste modo, um item que apresenta uma curva mais à direita do que outro exige do respondente uma maior habilidade para dar a resposta correta.

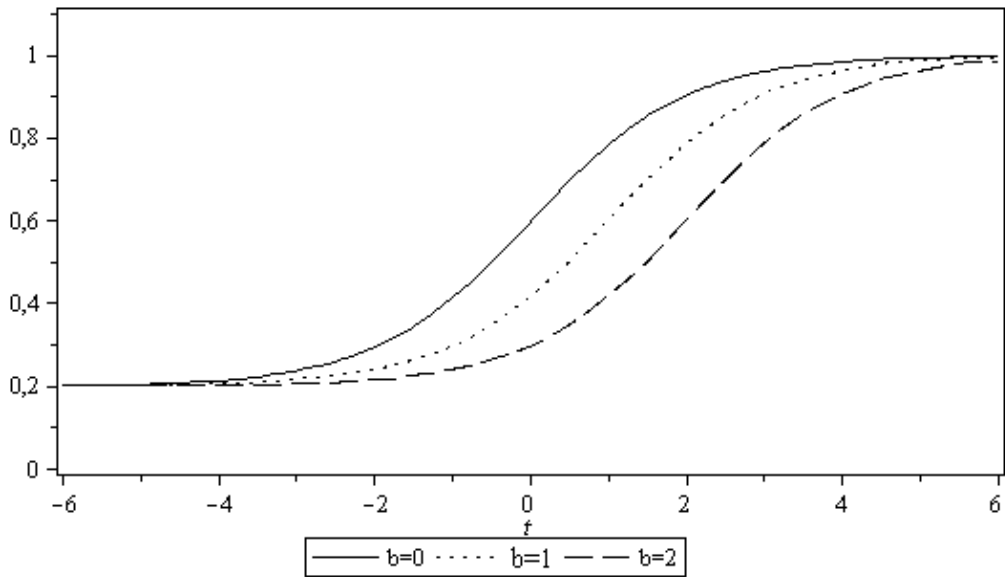


Gráfico 04

### 3.3 Modificando o parâmetro a e mantendo fixos b e c.

Na figura a seguir, temos modelos de CCI, portanto é fácil ver que à medida que o parâmetro de discriminação aumenta, maior é a inclinação da curva em  $t = b$ , se aproximando de uma inclinação perpendicular ao eixo das habilidades. É possível perceber, ainda, que quanto mais inclinada a CCI mais será ampliada uma eventual diferença de habilidades entre dois indivíduos (sempre próximo a  $t = b$ ). Ou seja, parâmetros de discriminação maiores tendem a ampliar diferenças de habilidade, enquanto os menores tendem a reduzi-las (no sentido da probabilidade de acerto do item em questão).

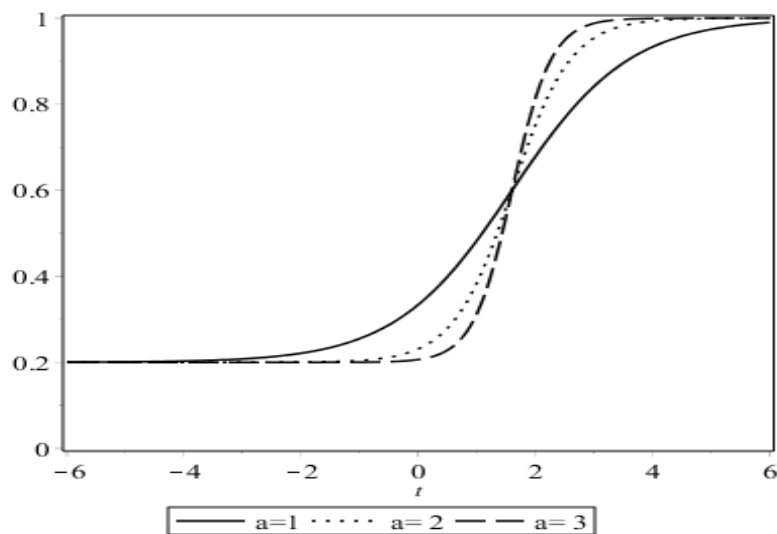


Gráfico 05

No exemplo a seguir fica fácil observar a variação na probabilidade de acerto, à medida que o parâmetro  $a$  aumenta. Como já vimos, a inclinação da curva no ponto de inflexão é proporcional ao parâmetro  $a$ . Desse modo, pequenas mudanças no traço latente levam a uma grande mudança de probabilidade.

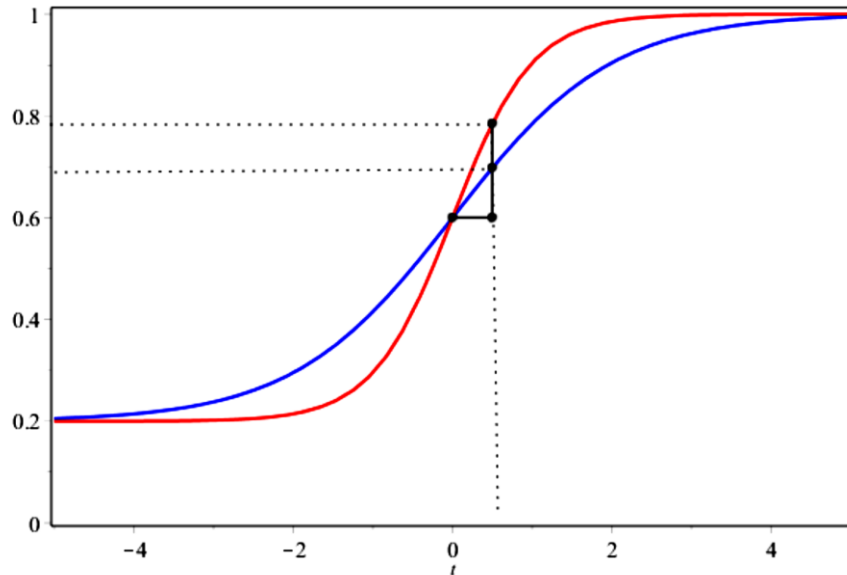


Gráfico 06

### 3.4 Modificando o parâmetro $c$ e mantendo fixos $b$ e $a$ .

Pelo fato do parâmetro  $c$  apresentar a probabilidade de acerto casual, ele representa o ínfimo da probabilidade de acerto do item. Um valor costumeiro, em um item com  $N$  alternativas, é o valor de  $c = 1/N$  (por exemplo,  $c = 0.2$  para 5 alternativas - o caso do ENEM).

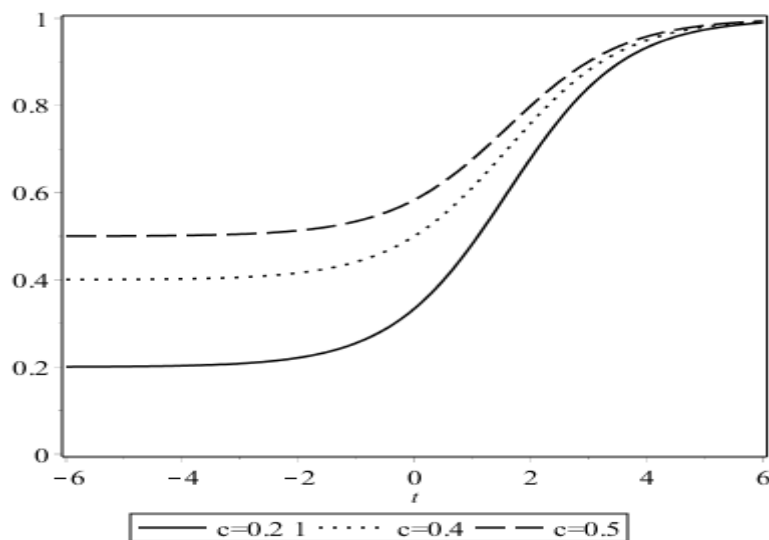


Gráfico 07

#### 4 Análise 2d mantendo a fixo e variando b.

Para visualizar melhor o comportamento das funções, criaremos pequenos casos e faremos uma análise 2d das FRIs e das habilidades: em relação a alguns indivíduos com habilidades  $t_i$ . Para essa análise, manteremos o parâmetro de discriminação fixo e igual a 1. Os parâmetros de dificuldade serão escolhidos aleatoriamente e de modo crescente, e para todas as funções usaremos  $c = 0.2$  e  $d = 1$ .

Nas tabelas, usaremos 1 e 0 para representar itens certo e errado, respectivamente.

##### 4.1 Um indivíduo e dois itens.

###### T1 acerta um item.

	F1	F2
T1	1	0

Tabela 01

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T1 acerta o item fácil e erra o item difícil, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 10$ .

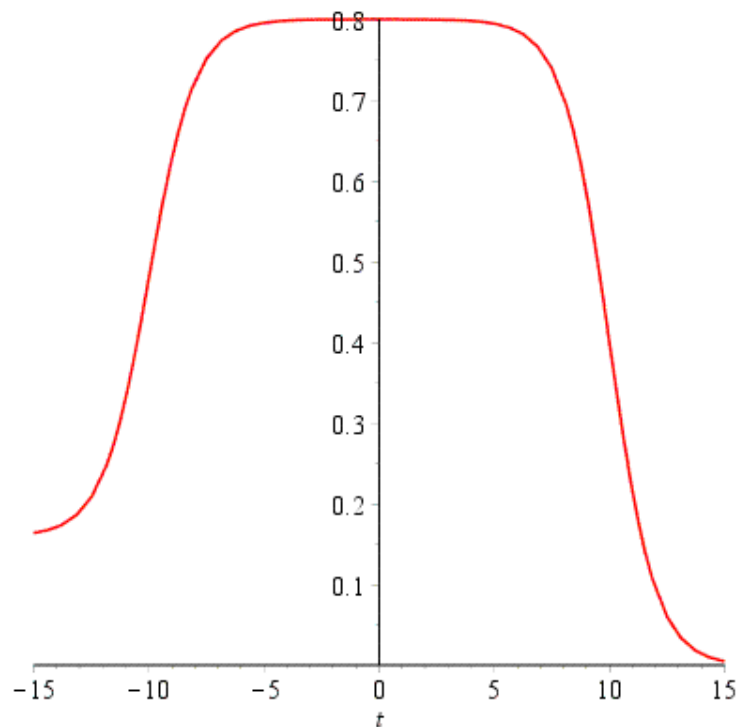


Gráfico 8

O indivíduo T1 ao acertar o item fácil e errar o difícil, resulta num gráfico com máximo finito e a habilidade é dada por  $\theta_1 = -0.1115819276$ , bem próximo de zero, como é possível observar no gráfico acima.

**T2 acerta um item.**

	F1	F2
T2	0	1

Tabela 02

Nesse caso, simularemos o contrário do caso anterior, em que um indivíduo T2 acerta o item difícil e erra o item fácil, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 10$ .

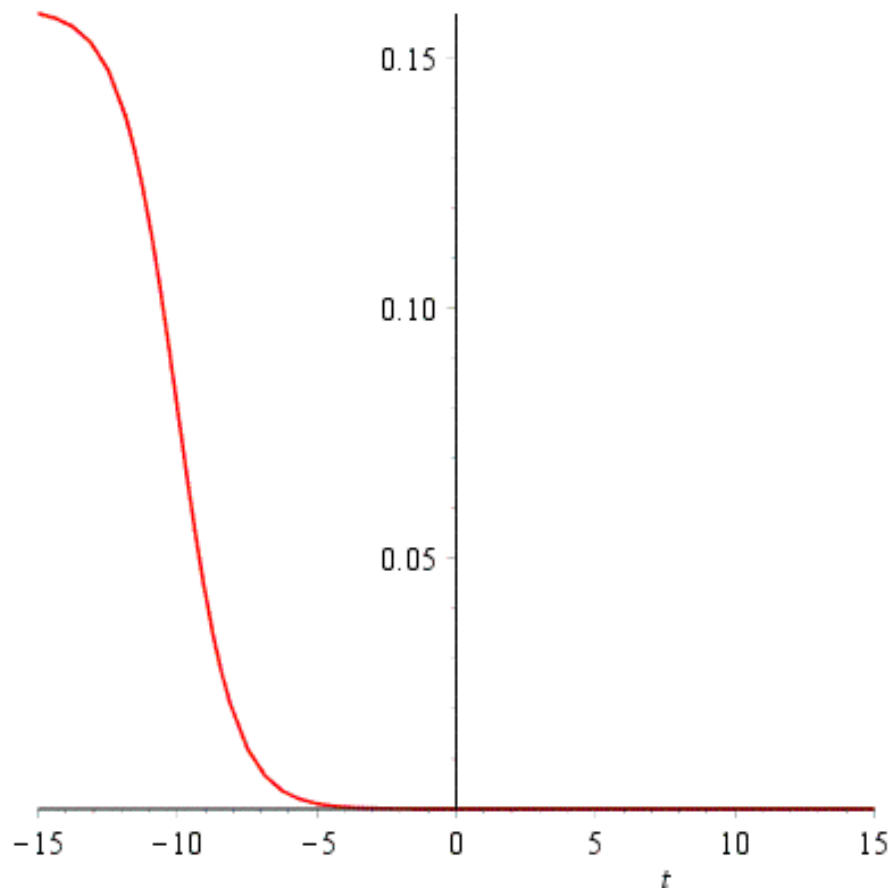


Gráfico 9

Como é possível observar, a habilidade correspondente é  $-\infty$ .

Em uma correção pela teoria clássica dos testes, ambas as notas seriam iguais, porém pela TRI é notório que elas são bem diferentes, pois o que importa, de fato, é a coerência das



respostas e não somente os acertos. É esperado que a habilidade do primeiro respondente seja maior que do segundo, o que de fato ocorreu, já que o indivíduo T1 respondeu corretamente o item fácil e errou o difícil, o que é totalmente plausível. Já T2 responde incorretamente ao item de menor dificuldade e acerta o item mais difícil, isso indica que ele obteve um acerto casual ou “chute”.

#### 4.2 Um indivíduo, três itens e um acerto.

Agora, vamos ampliar um pouco o número de itens para continuar uma análise das FRIs e das habilidades dos indivíduos. Manteremos o parâmetro de discriminação fixo e igual a 1. Os parâmetros de dificuldade serão escolhidos aleatoriamente e de modo crescente, para todas as funções usaremos  $c = 0,2$  e  $d = 1$ .

##### T1 acerta um item.

	F1	F2	F3
T1	1	0	0

Tabela 03

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T1 acerta o item fácil e erra os itens mais difíceis, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

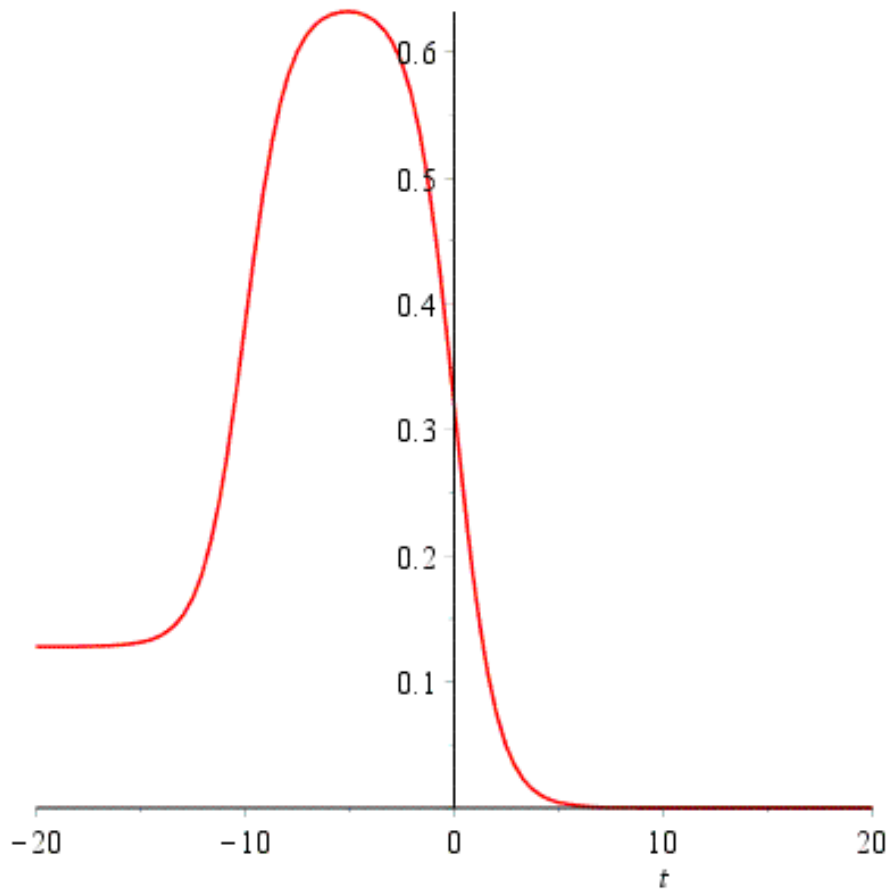


Gráfico 10

Como esperado, temos um máximo finito e uma habilidade  $\theta_1 = -5.113107118$ . É uma baixa habilidade, mas devemos considerar que somente um terço dos itens foram acertados.

**T2 acerta um item.**

	F1	F2	F3
T2	0	1	0

Tabela 04

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T2 acerta o item de dificuldade intermediária e erra os itens fácil e difícil, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

Vamos as contas:

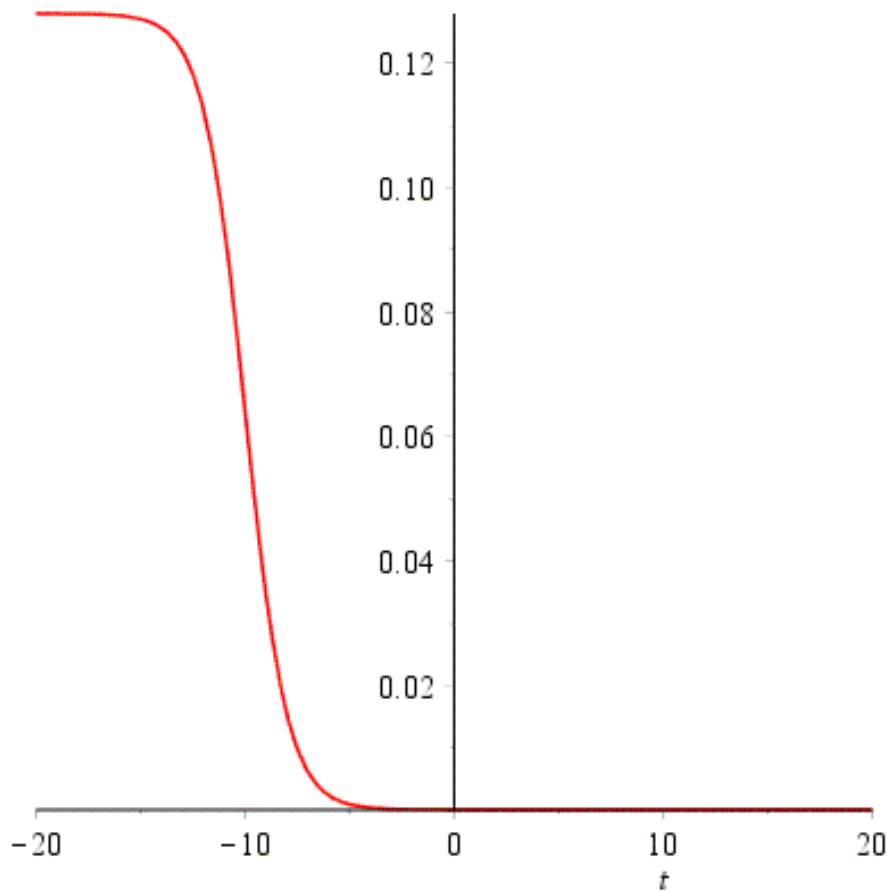


Gráfico 11

Novamente, como é possível observar, a habilidade correspondente é  $-\infty$ .

Previsivelmente, o mesmo ocorrerá para o próximo caso, vejamos.

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T3 acerta o item de maior dificuldade e erra os itens fácil e intermediário, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

**T3 acerta um item.**

	F1	F2	F3
T3	0	0	1

Tabela 05

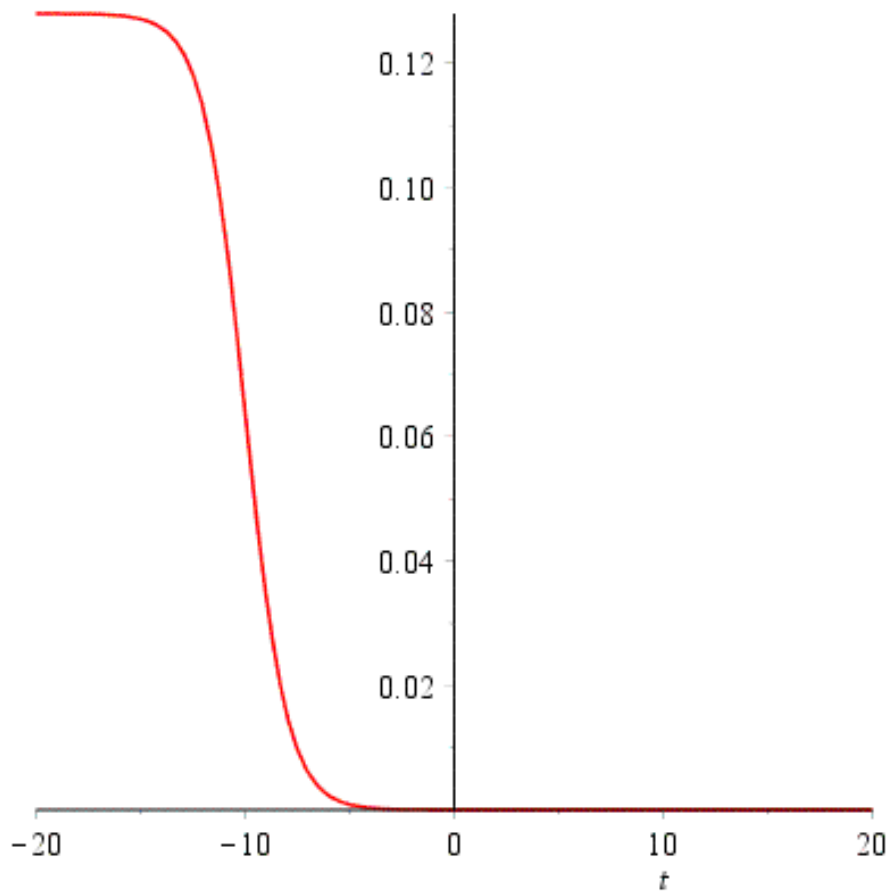


Gráfico 12

Como esperado, a habilidade correspondente é  $-\infty$ .

### 4.3 Um indivíduo, três itens e dois acerto.

**T1 acerta dois itens.**

	F1	F2	F3
T1	1	1	0

Tabela 06

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T1 acerta os itens fácil e intermediário e erra o item mais difícil, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

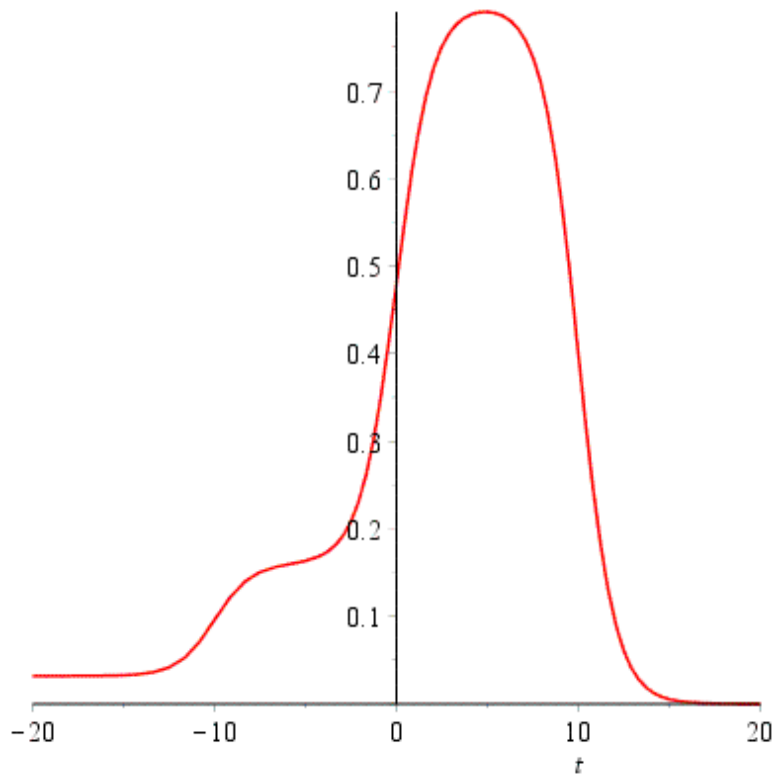


Gráfico 13

Como esperado, acertar os dois mais fáceis e errar o difícil, temos um máximo finito e o valor da habilidade é  $\theta_1 = +4.886938969$ . Uma habilidade elevada se dá pela consistência das respostas, uma vez que o “normal” é acertar os fáceis e errar os mais difíceis.

**T2 acerta dois itens.**

	F1	F2	F3
T2	1	0	1

Tabela 07

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T2 acerta os itens fácil e difícil e erra o item intermediário, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

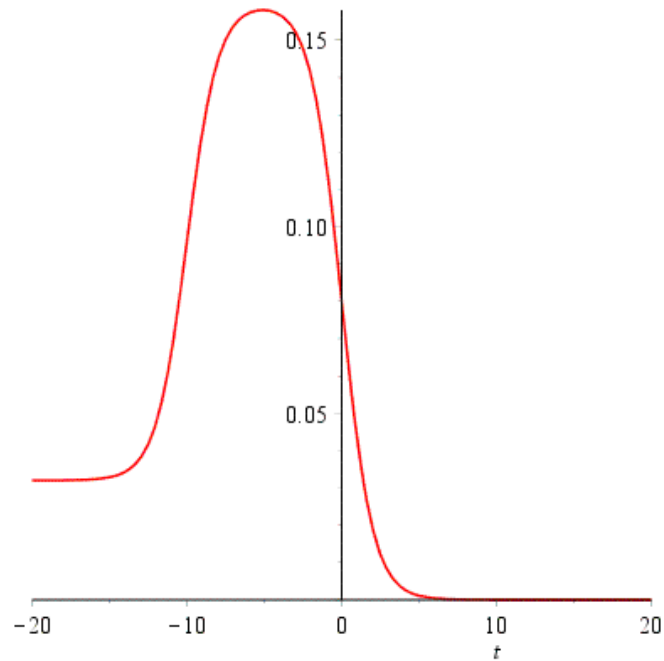


Gráfico 14

$$\theta_1 = -5.112992066$$

Acima vemos que a habilidade de quem só erra o item intermediário é maior do que a de quem só acerta o fácil, mas com uma diferença mínima, já que o mais 'consistente' seria errar o difícil e não o médio. Vale ainda observar a diferença gritante entre as habilidades de quem só erra o intermediário com quem só erra o mais difícil.

**T3 acerta dois itens.**

	F1	F2	F3
T3	0	1	1

Tabela 08

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T3 acerta os itens intermediário e difícil e erra o item mais fácil, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$

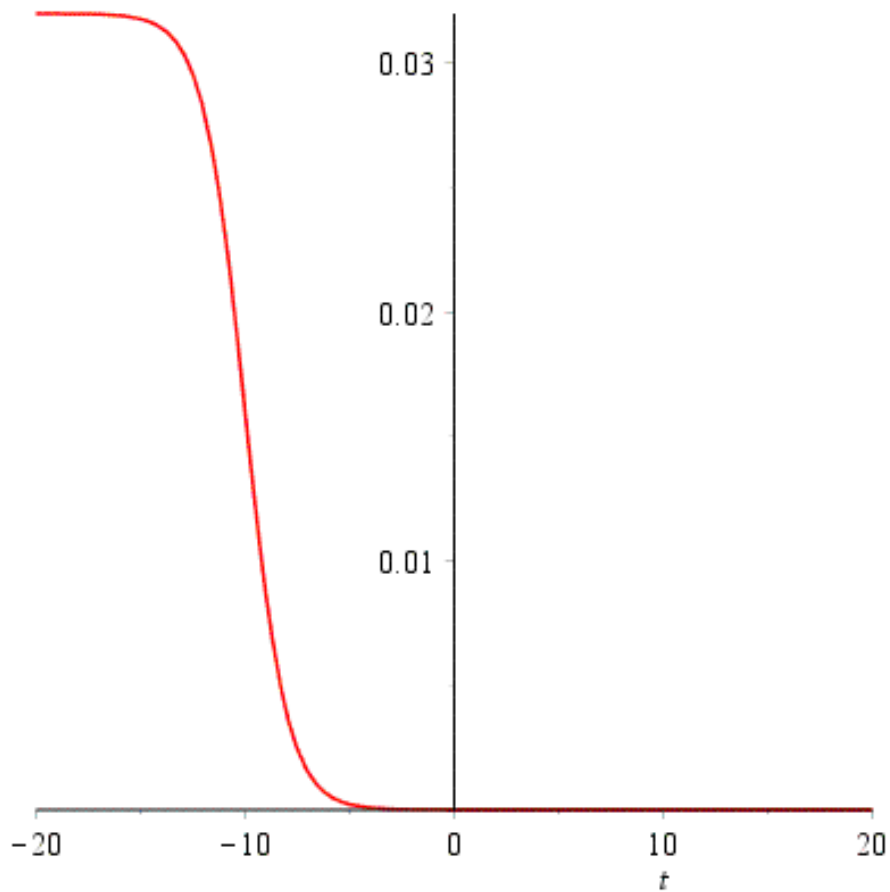


Gráfico 15

Devido a incoerência dos acertos, mesmo o indivíduo T3 acertando dois itens em 3, sua habilidade é  $-\infty$ . Pois não é razoável que ele não acerte o item mais fácil e acerte os mais difíceis.

#### 4.4 Um indivíduo, três itens e três acerto.

**T1 acerta três itens.**

	F1	F2	F3
T1	1	1	1

Tabela 09

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T1 acerta todos os itens, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$ .

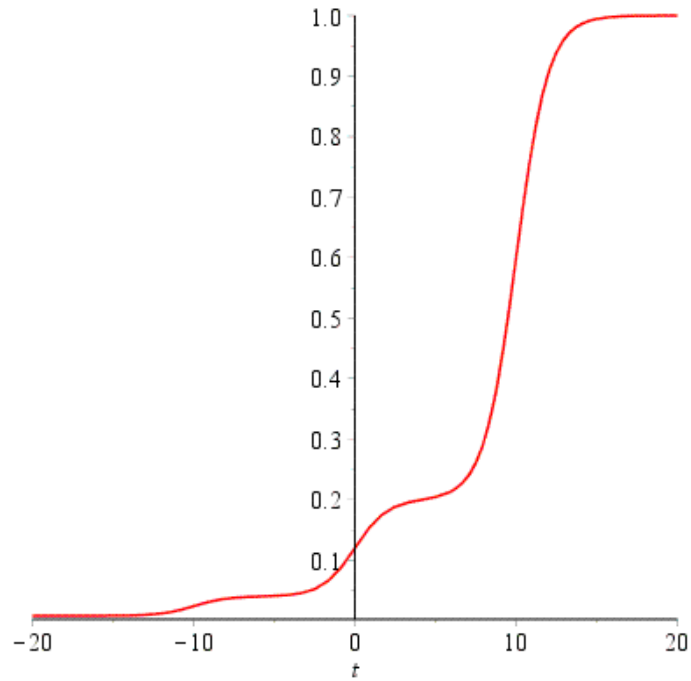


Gráfico 16

É esperado que um indivíduo que acerte todos os itens tenha uma habilidade alta para o teste em questão. Como é possível observar no gráfico acima, a habilidade correspondente é  $+\infty$ .

#### 4.5 Um indivíduo, três itens e três erros.

**T1 erra três itens.**

	F1	F2	F3
T1	0	0	0

Tabela 10

Nesse caso, simularemos que um indivíduo T1 erra todos os itens, sendo  $b_1 = -10$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = 10$ .



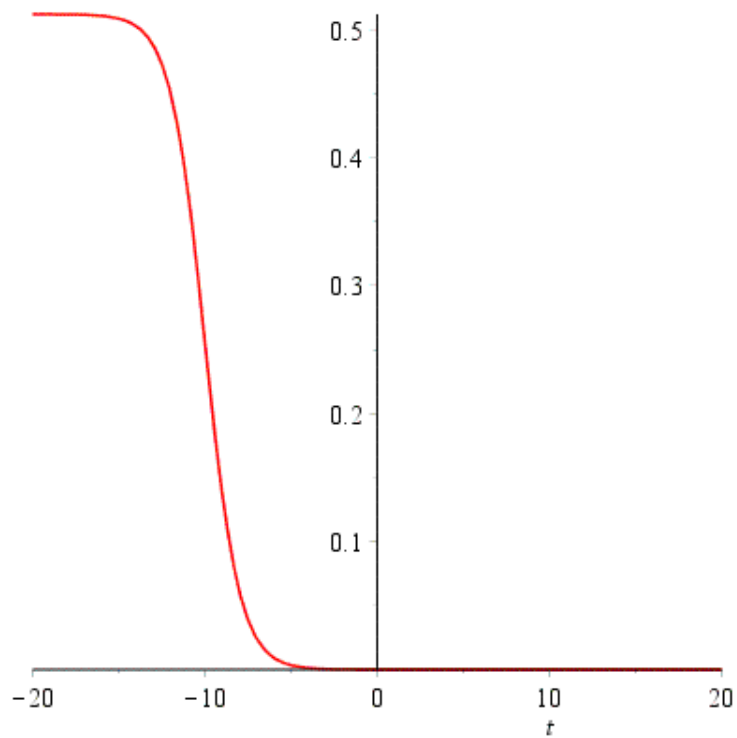


Gráfico 17

Esse caso é o oposto do anterior, é esperado que um indivíduo que erre todos os itens tenha uma habilidade muito baixa para o teste em questão. Como é possível observar no gráfico acima, a habilidade correspondente é  $-\infty$ .

Esses exemplos com um indivíduo e 3 itens dão uma ideia do que esperar com dois indivíduos e 3 itens, já que a função a maximizar é um produto de uma de  $t_1$  e outra de  $t_2$ .

## 5 Atribuindo habilidades, dado um resultado.

Vamos supor agora que temos dois indivíduos, com habilidades  $t_1$ ,  $t_2$  e 5 itens, representados por suas FRIs:  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  e  $f_5$ . Aqui supomos que todos os parâmetros dos itens são conhecidos.

Suponhamos ainda que uma prova foi aplicada e que sabemos os resultados obtidos por cada indivíduo em cada item. Ou seja, conhecemos os valores  $u_{ij}$  das variáveis aleatórias *definidas* acima. Neste cenário, podemos calcular a probabilidade de se obter o resultado medido. Para isto, usando a independência tanto entre indivíduos, como entre respostas de um mesmo indivíduo, temos:

$$f(t_1, t_2) = \prod_{i,j}^n P(U_{ij} = u_{ij}, i = 1,2,3,4,5, j = 1,2) = \prod_{i=1}^5 \left( \prod_{j=1}^2 P(U_{ij} = u_{ij}) \right) =$$

Cada probabilidade no produtório é igual a  $f_i(t_j)$ , no caso de  $u_{ij} = 1$  ou  $1 - f_i(t_j)$  no caso de ser  $u_{ij} = 0$ , de acordo com a definição das FRI.

No caso presente, como são dois indivíduos, podemos representar o gráfico desta função  $f(t_1, t_2)$  no espaço, para melhor visualizar o problema.

Estamos agora em uma situação em que aplicamos uma prova e a corrigimos. Se fôssemos usar a teoria clássica, também saberíamos quais valores dar às habilidades  $t_1$ ,  $t_2$ : simplesmente a fração de itens acertados. A ideia agora é usar a função  $f$  e atribuir a  $t_1$  e  $t_2$  os valores destas variáveis que realizam o máximo desta função. Ou seja, a ‘nota’ de cada indivíduo, medida como o valor de sua habilidade  $t_j$ , será aquela que, junto com as dos demais indivíduos, maximiza a probabilidade de o resultado da prova ser o que foi, de fato, verificado.

### 5.1 Análise 3d mantendo a fixo e variando b.

Para visualizar melhor o comportamento das funções faremos uma análise 3d das FRIs:  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  e  $f_5$ , em relação a dois indivíduos com habilidades  $t_1$  e  $t_2$ . Para essa análise, manteremos o parâmetro de discriminação fixo e igual a 1 e os parâmetros de dificuldade iguais a  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 1.6$ ,  $b_4 = 2$ ,  $b_5 = 2.6$ . Para cada uma das cinco funções usaremos  $c = 0.2$  e  $D = 1$ . Em uma tabela, usaremos 1 e 0 para representar itens certos e errados, respectivamente.

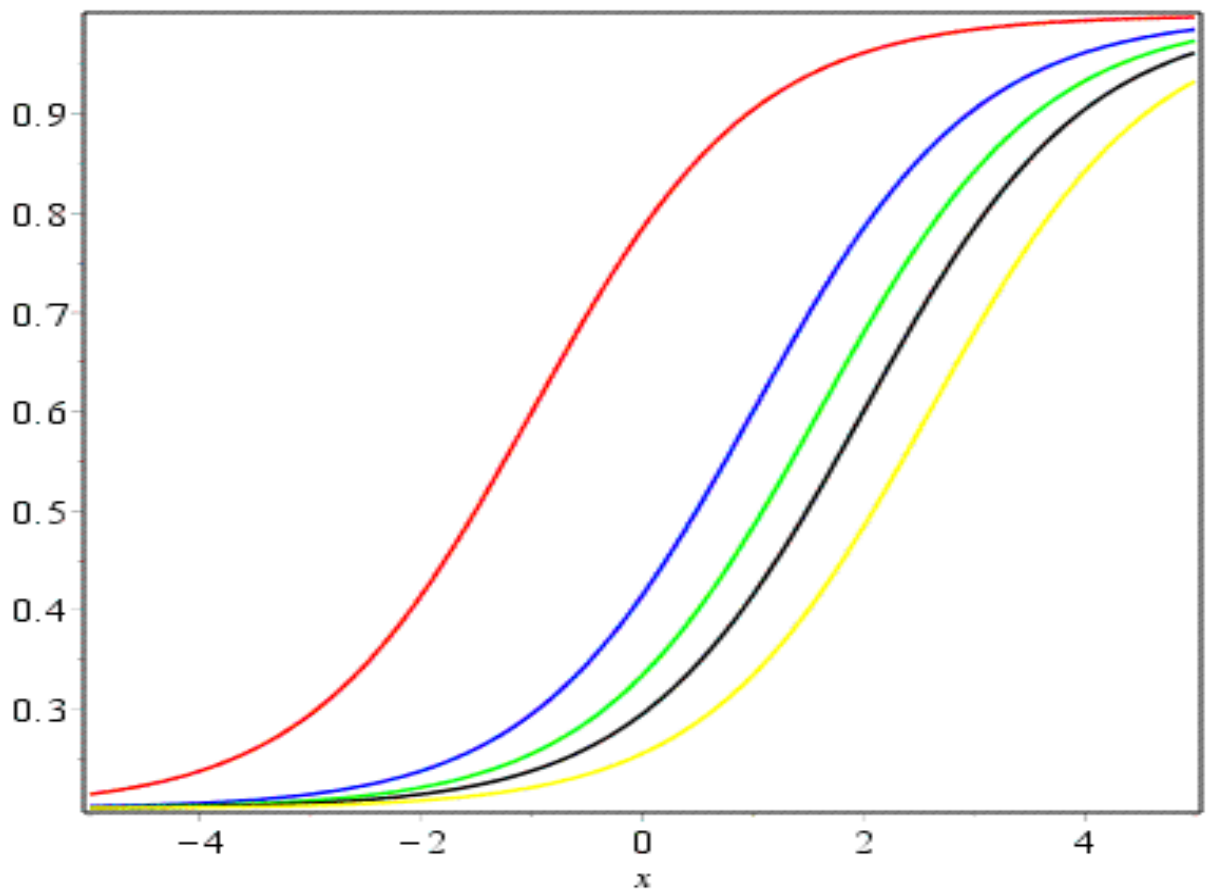


Gráfico 18

**> g:=(t1,t2)->(f1(t1))\*f2(t1))\*f3(t1))\*(1-f4(t1))\*f5(t1))\*(1-f1(t2))\*f2(t2))\*f3(t2))\*f4(t2))\*f5(t2));**

*g := (t1, t2) → f1(t1)f2(t1)f3(t1) (1 - f4(t1))f5(t1) (1 - f1(t2))f2(t2)f3(t2)f4(t2)f5(t2)*

### 5.1.1 T1 e T2 acertam todos os itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	1	1	1
T2	1	1	1	1	1

Tabela 11

Neste caso, era de se esperar para ambos os indivíduos, uma habilidade infinita. Afinal, todos os itens foram acertados. Isso deveria ser ilustrado por uma função sem máximo finito.

Vamos às contas:

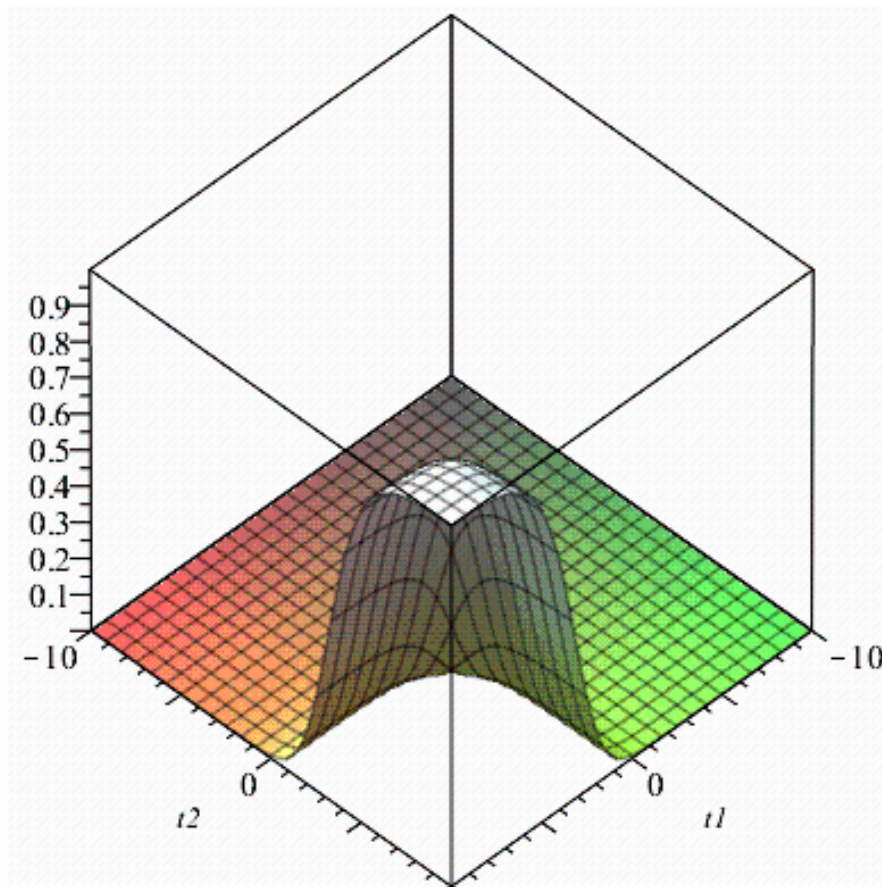


Gráfico 19

O gráfico é simétrico em  $t_1$  e  $t_2$  e claramente tem seu sup quando ambas variáveis tendem a  $+\infty$ .

### 5.1.2 T1 e T2 erram todos os itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0

Tabela 12

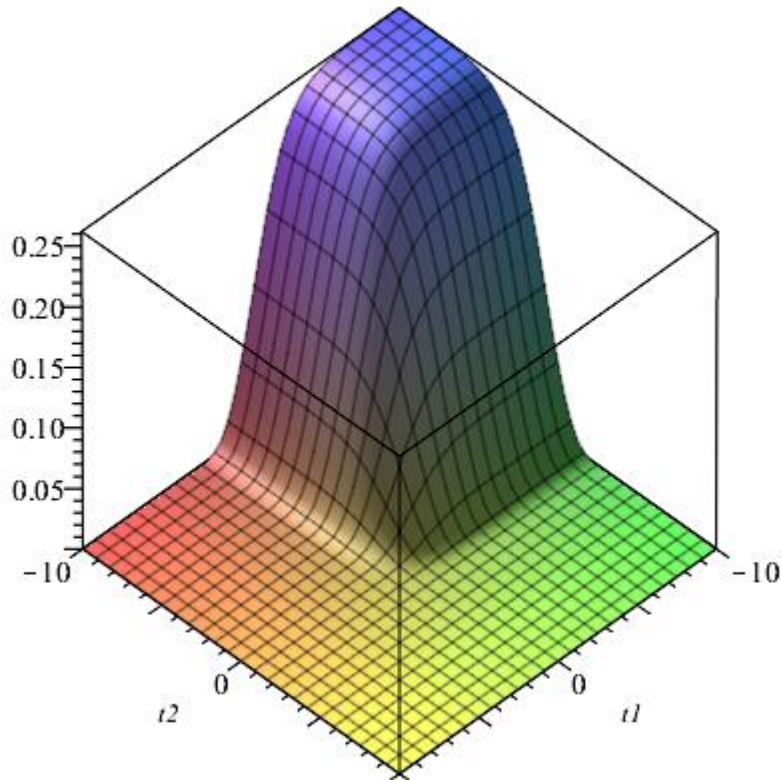


Gráfico 20

O raciocínio agora é o reverso do caso anterior: para errar todos itens, cada indivíduo deve ter habilidade  $-\infty$ , como ilustra a figura.

### 5.1.3 T1 e T2 erram um item.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	1	0	1
T2	1	0	1	1	1

Tabela 13

Nesse caso, ambos os indivíduos acertam o mesmo número de questões, pela teoria clássica dos testes suas notas são iguais, porém, pela TRI é esperado que a habilidade do primeiro respondente seja maior do que a do segundo, uma vez que o indivíduo de habilidade  $t_2$  errou um item com nível de dificuldade baixo e acertou todos os demais, já o indivíduo  $t_1$  errou apenas um dos itens mais difíceis e acertou os demais. Quanto maior a coerência nas resposta maior será sua nota no teste. Vamos às contas:

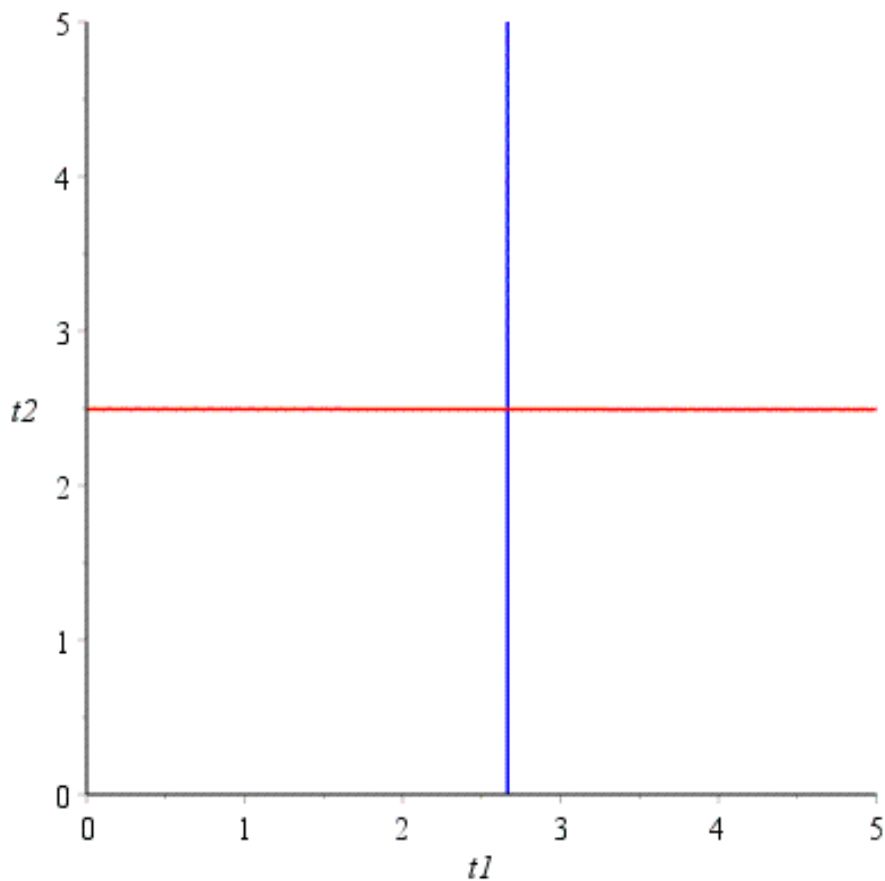


Gráfico 21

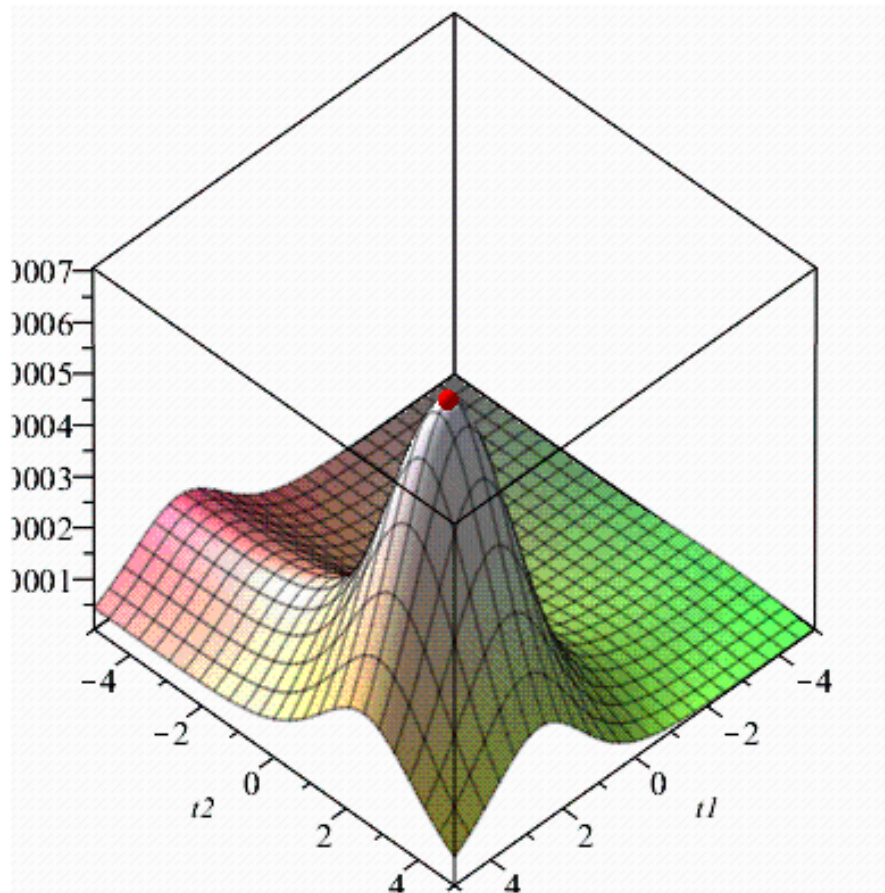


Gráfico 22

Como é possível notar no gráfico, nesse exemplo existe um ponto de máximo finito, que denota as habilidades dos respondentes do teste, e são elas,  $\{t_1 = 2.664829729, t_2 = 2.492551171\}$  e como esperado  $t_1 > t_2$ .

#### 5.1.4 T1 e T2 erram dois itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	1	0	0
T2	1	0	0	1	1

Tabela 14

Novamente, estamos diante de um caso em que os dois indivíduos possuem o mesmo número total de acertos, porém em itens diferentes. Pelo que vimos até aqui, é esperado que T1 tenha uma nota muito superior à de T2. Vamos as contas:

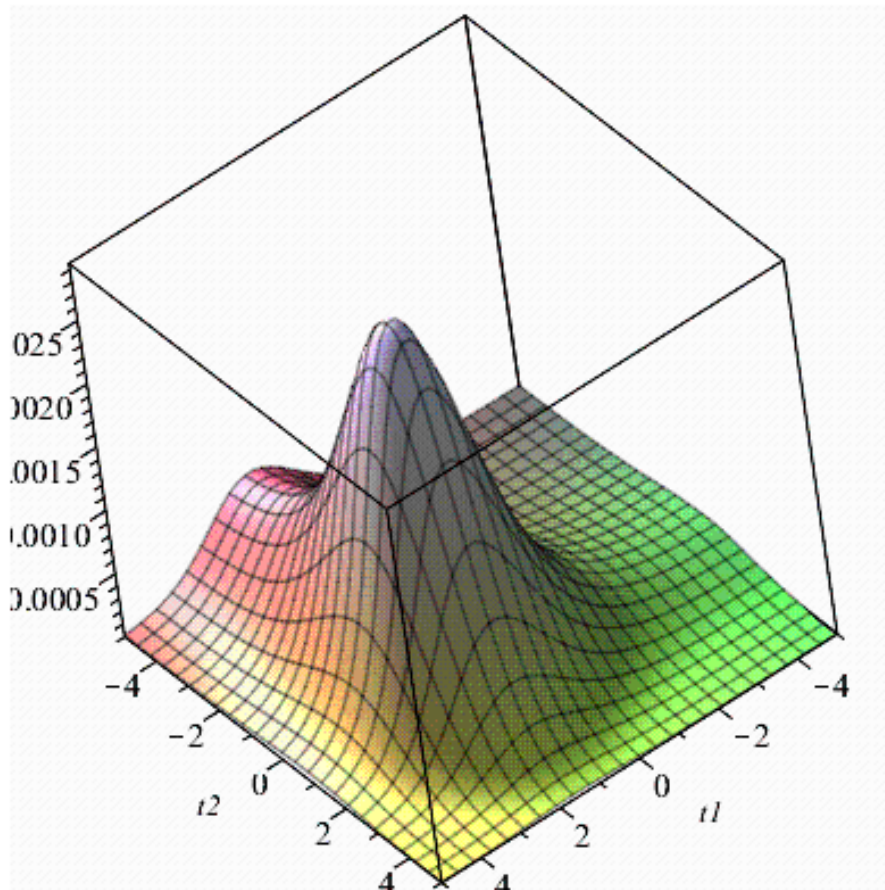


Gráfico 23

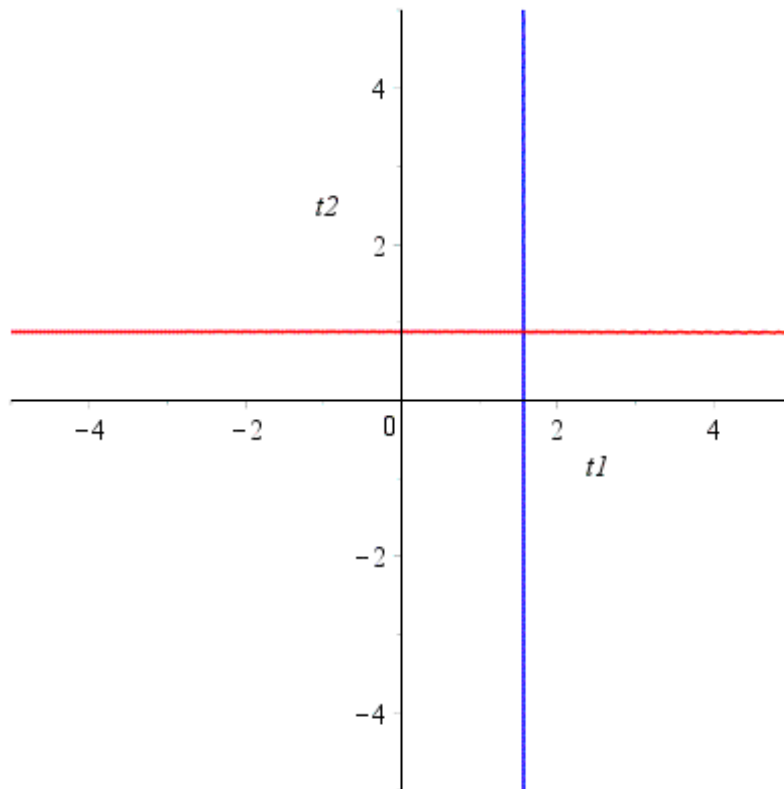


Gráfico 24



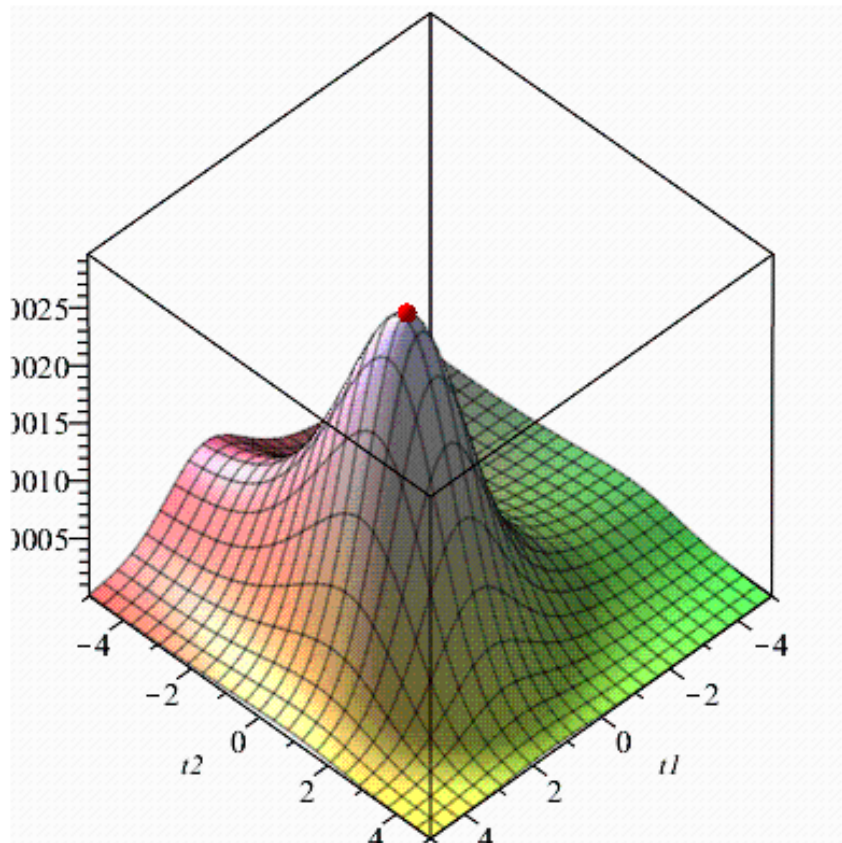


Gráfico 25

Como é possível notar, na figura acima, existe um ponto de máximo finito com  $t_1 < t_2$ .

Com  $t_1 = 1,563236170$  e  $t_2 = 0,8795448667$ .

### 5.1.5 T1 e T2 acertam dois itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	0	0	0
T2	1	0	0	0	1

Tabela 15

Nesse caso, novamente ambos os respondentes acertaram o mesmo número de itens, porém, com diferentes acertos. Deste modo, é esperado que suas habilidades sejam diferentes. O indivíduo de habilidade  $t_1$  acerta os dois primeiros itens, os de menor dificuldade, e erra os demais; já o de habilidade  $t_2$  erra os itens de dificuldade

intermediária acertando somente o mais fácil e o mais difícil. Pelo padrão das respostas fornecido espera-se que a habilidade de  $t_1$  seja maior que de  $t_2$ , pois, apesar de  $t_1$  apresentar uma baixa habilidade ele teve uma coerência nos acertos. Por ter acertado somente dois itens,  $t_2$  também apresenta uma baixa habilidade, mas que deve ser menor que as de  $t_1$ , já que é possível que ele tenha tido um acerto casual no item  $f_5$ .

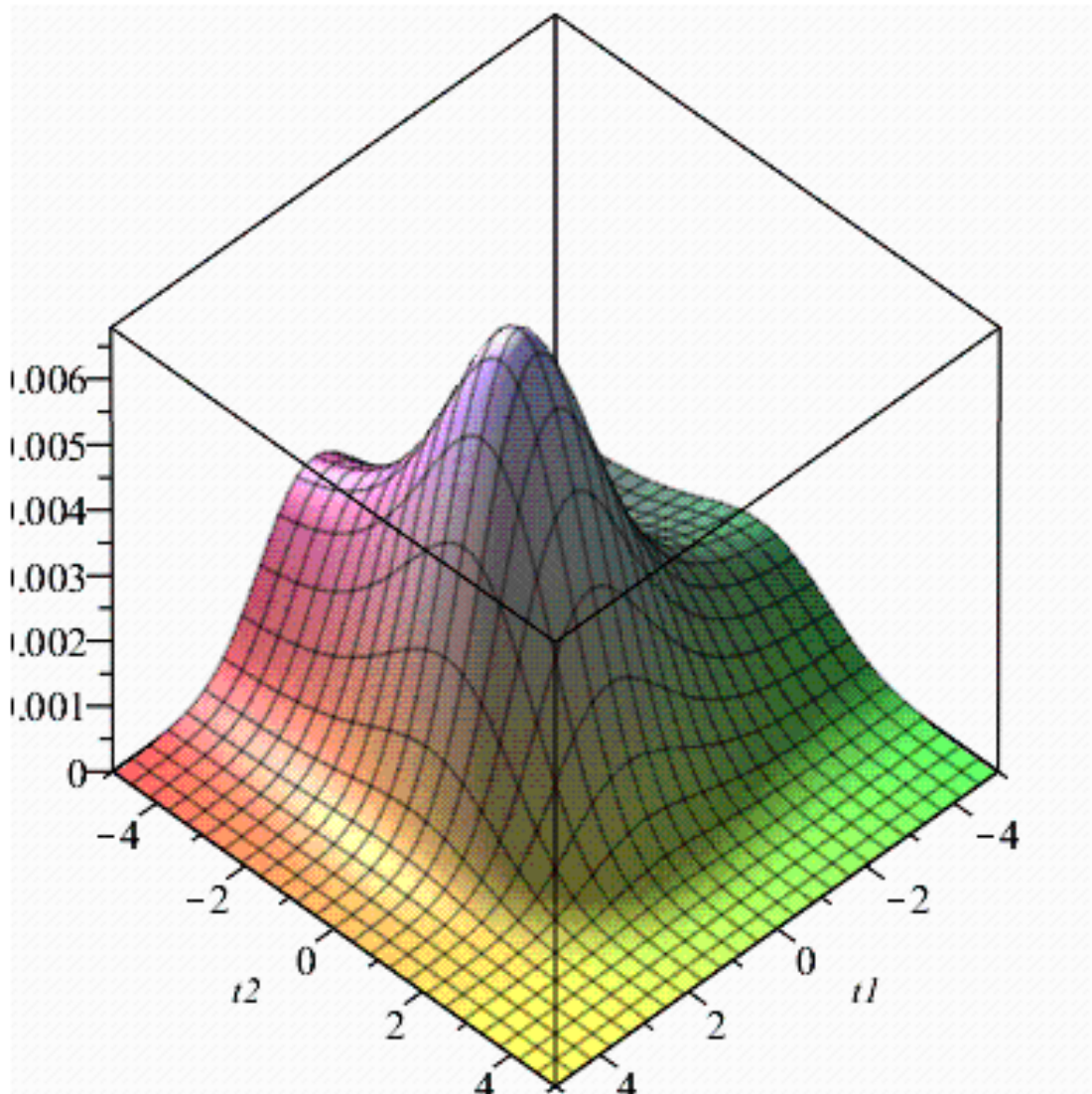


Gráfico 26

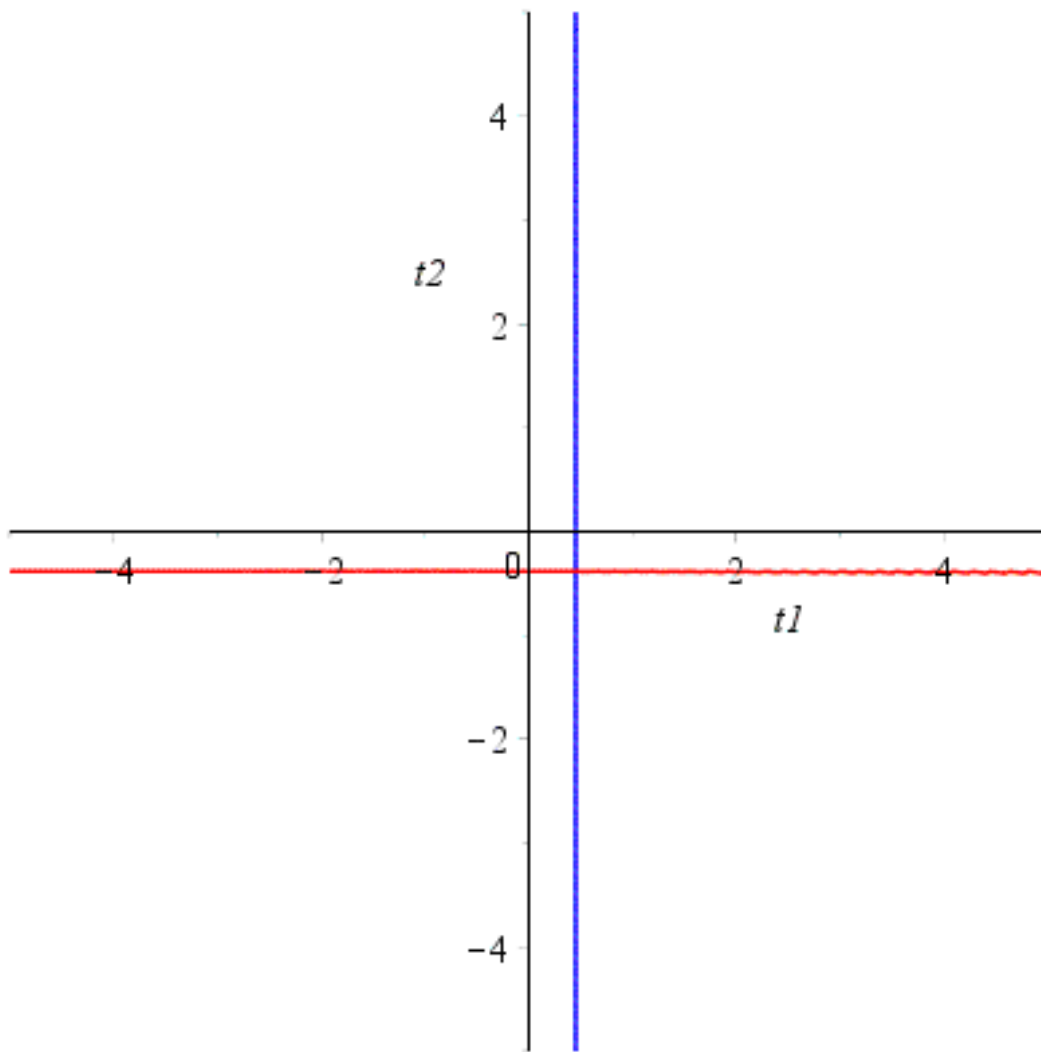


Gráfico 27

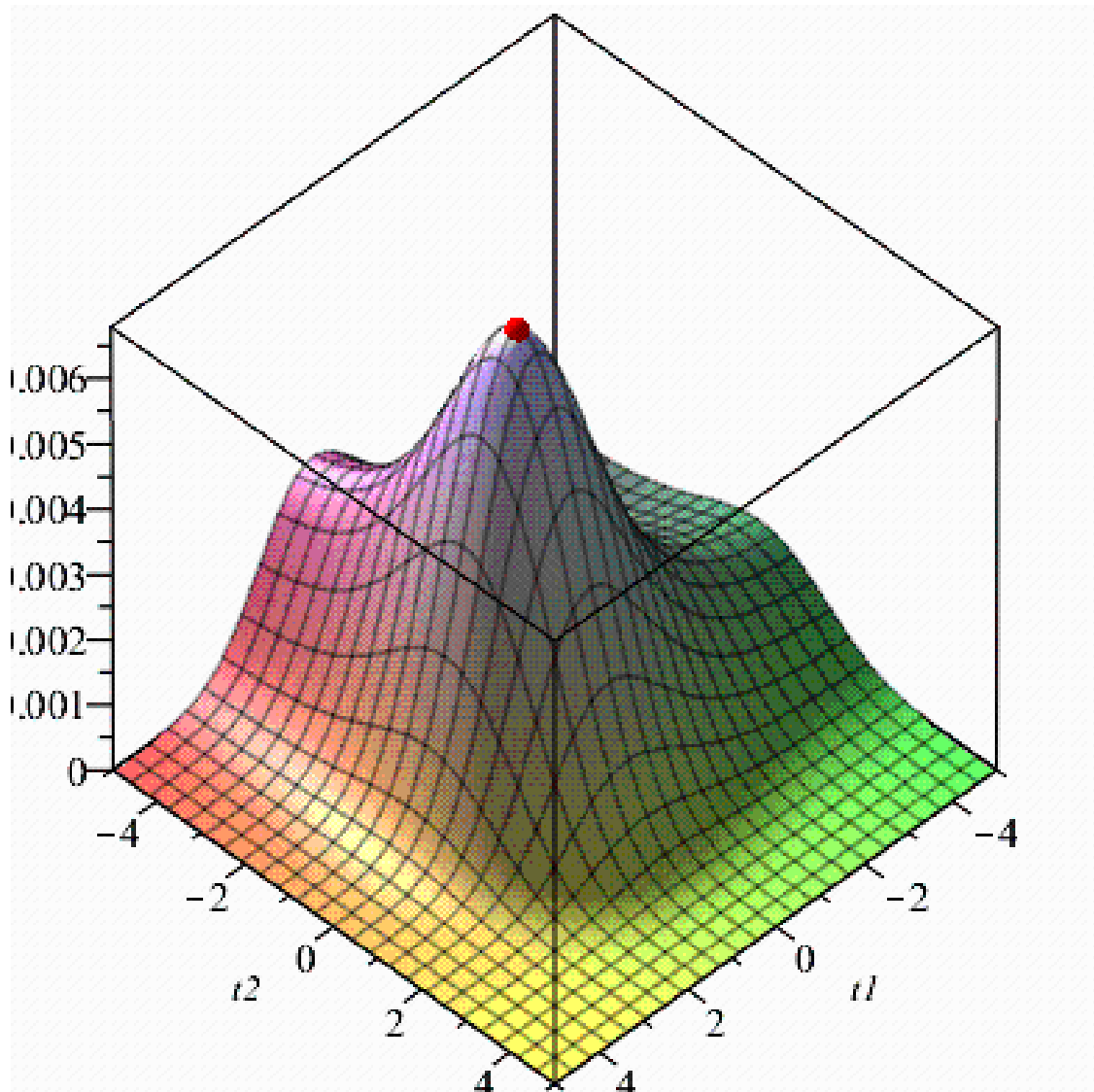


Gráfico 28

Como é possível notar no gráfico, nesse exemplo existe um ponto de máximo finito, que denota as habilidades dos respondentes do teste e como esperado  $t_1 > t_2$ . Note que este é um exemplo em que uma das habilidades é negativa. Isto não é um erro, apenas ilustra, como já havíamos comentado, que o domínio das habilidades é toda a reta real.

Com  $t_1 = 0.4534930973$ ,  $t_2 = -0.3805515138$

## 5.2 Análise 3d mantendo b Fixo e variando a.

Agora faremos uma análise, mantendo o parâmetro de dificuldade fixo e igual a 0 e os parâmetros de discriminação serão escolhidos de modo crescente, de  $f_1$  para  $f_5$ . Em detalhes:  $a_1 = 0.1, a_2 = 0.9, a_3 = 1.2, a_4 = 1.6, a_5 = 3$ . Para cada uma das cinco funções usaremos  $c = 0.2$  e  $D = 1$ . Em uma tabela, usaremos 1 e 0 para representar itens certos e errados, respectivamente. Vamos aos cálculos:

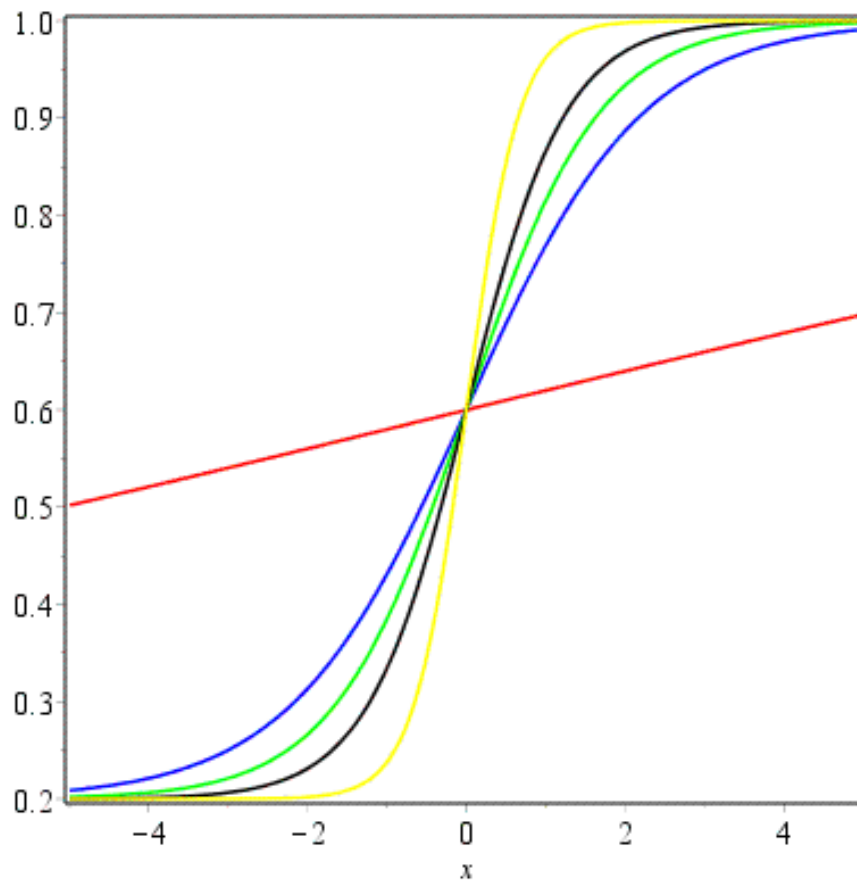


Gráfico 29

Na figura acima, temos a representação das cinco funções, é possível observar que o parâmetro de discriminação aumenta, maior é a inclinação da curva em  $t = b$ .

A seguir, analisaremos três casos hipotéticos e com os indivíduos acertando o mesmo número de itens.

Ficou evidente nos três casos que seguem, dado o parâmetro de dificuldade fixo, que a maior habilidade encontrada será do indivíduo que acerta o item que apresenta uma maior discriminação.

### 5.2.1 T1 e T2 acertam dois itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	0	0	0
T2	1	0	0	0	1

Tabela 16

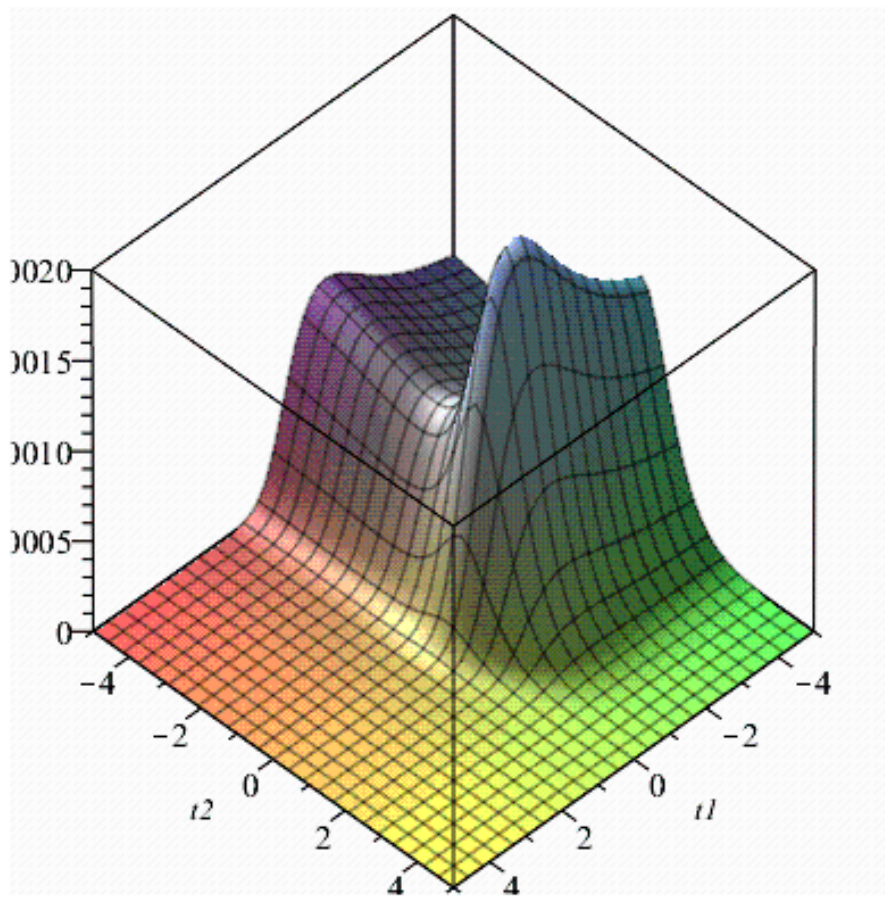


Gráfico 30

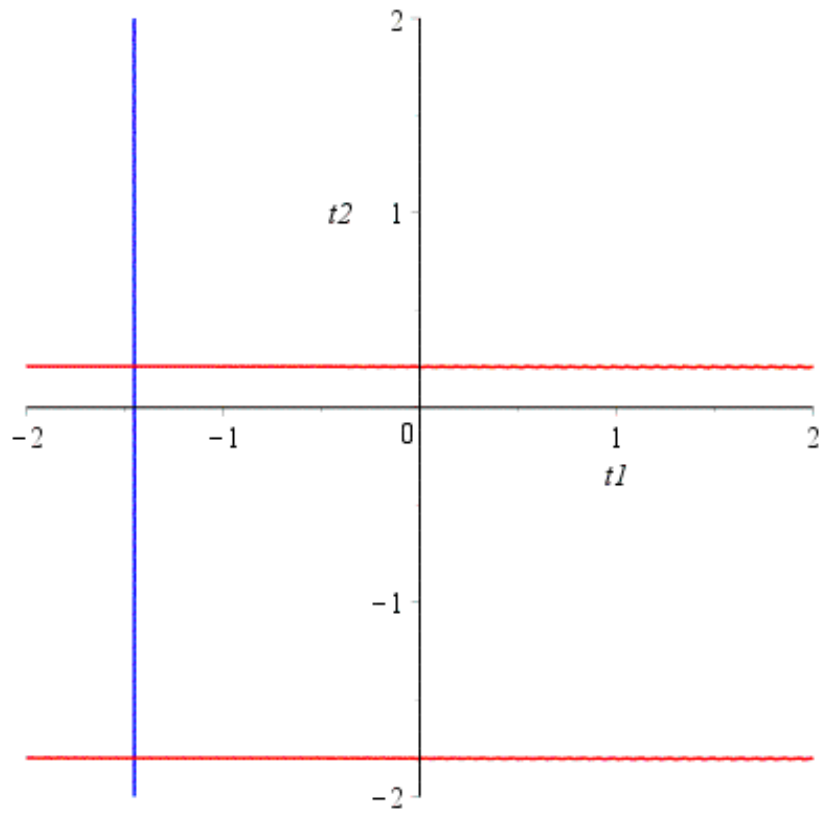


Gráfico 31

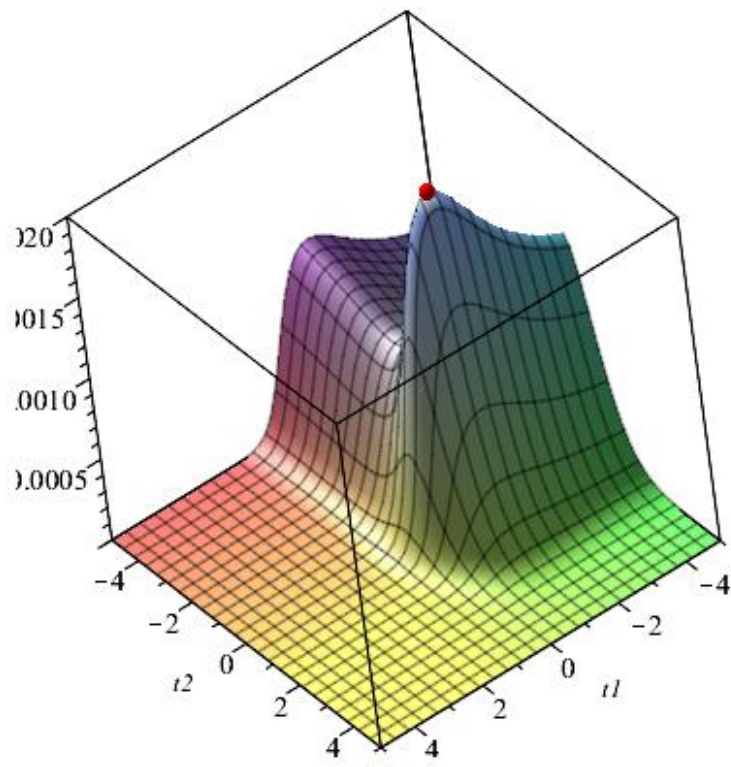


Gráfico 32



Ambos os indivíduos acertaram o 1º item mas, como T<sub>2</sub> acerta o item mais discriminativo sua habilidade é maior  $t_2 > t_1$ .

### 5.2.2 T1 e T2 erram dois itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	1	0	0
T2	0	0	1	1	1

Tabela 17

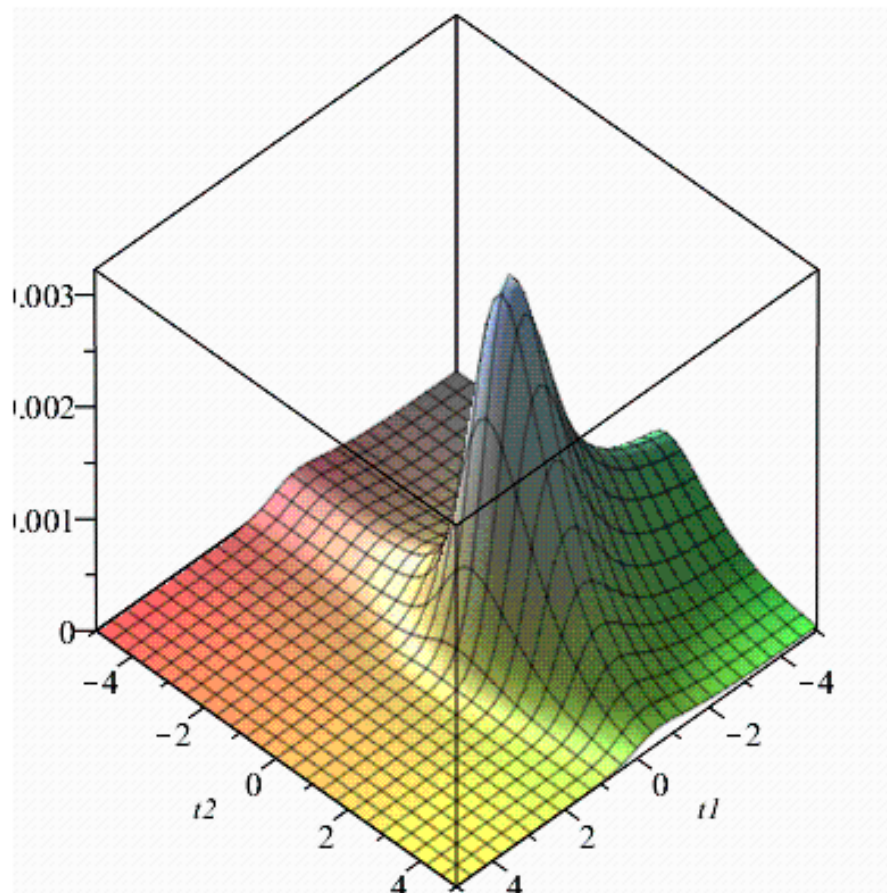


Gráfico 33



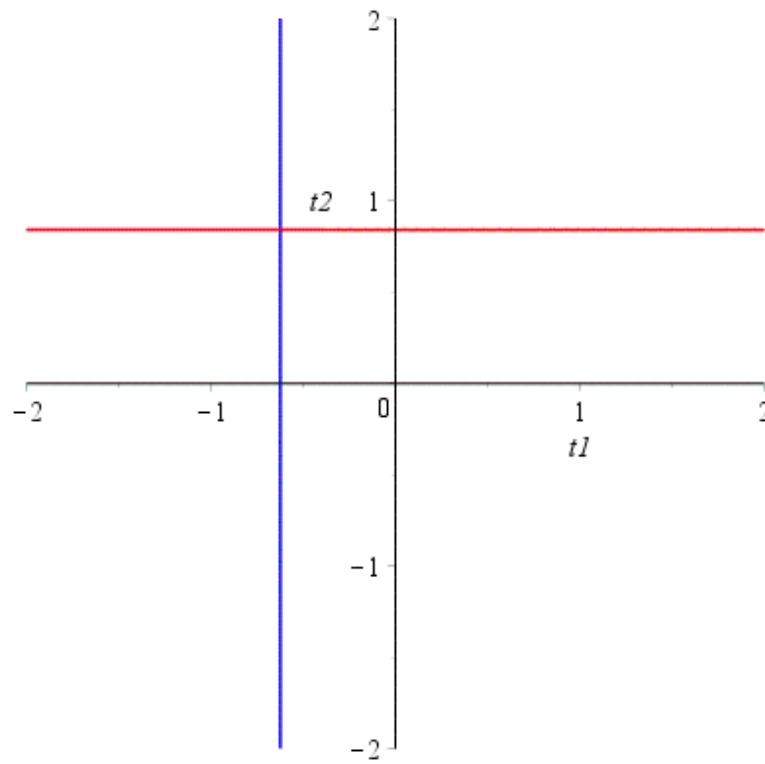


Tabela 34

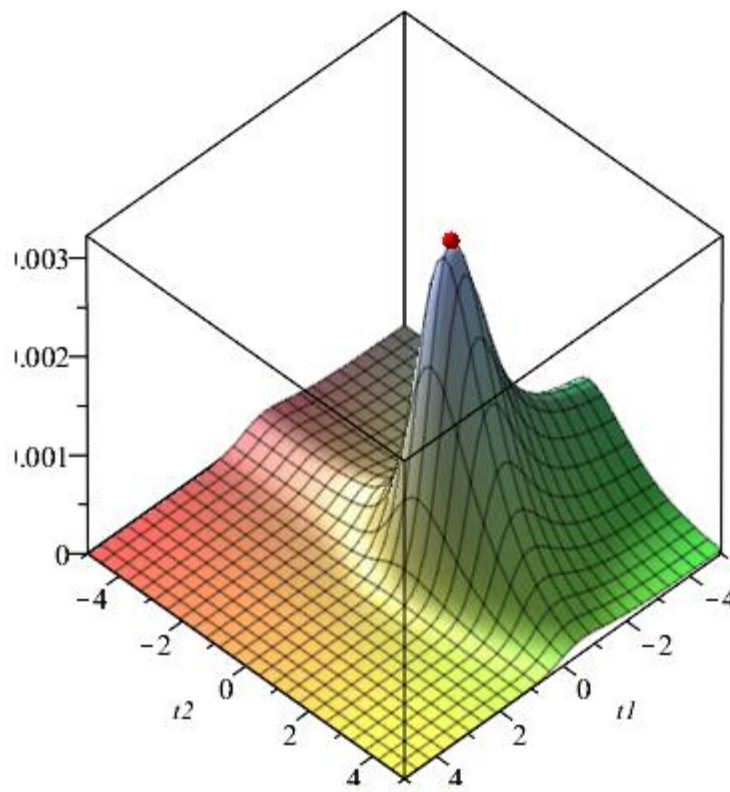


Gráfico 35

Novamente o que vemos é  $t_2 > t_1$ .

### 5.2.3 T1 e T2 erram quatro itens.

	F1	F2	F3	F4	F5
T1	1	1	1	1	0
T2	0	1	1	1	1

Tabela 18

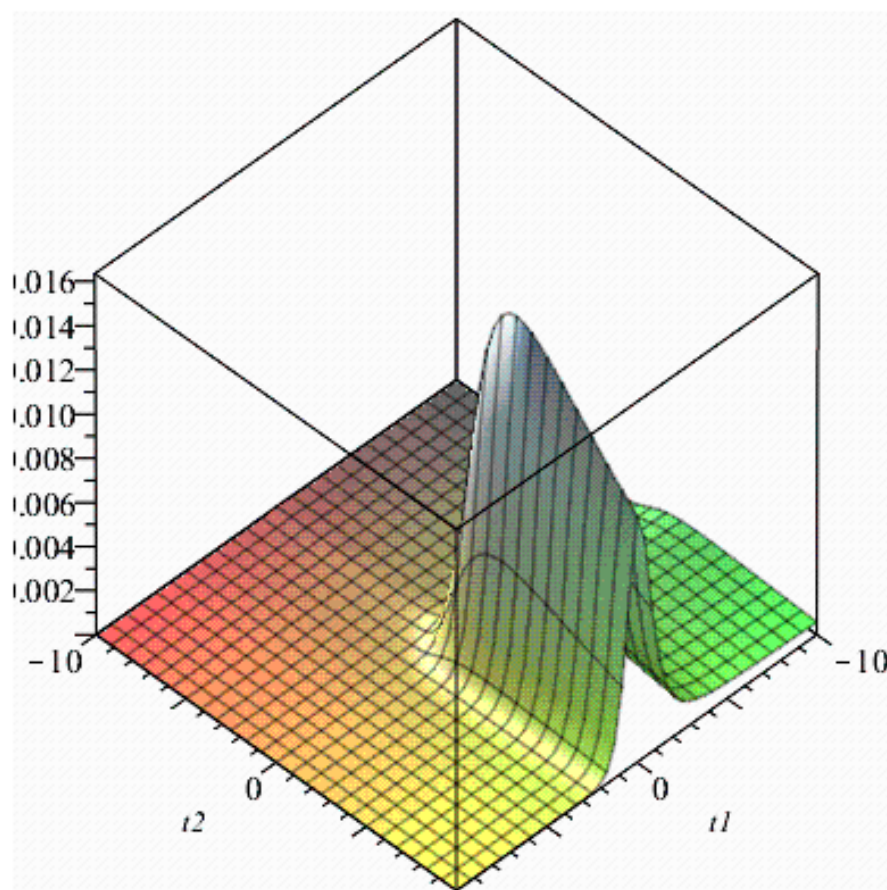


Gráfico 36

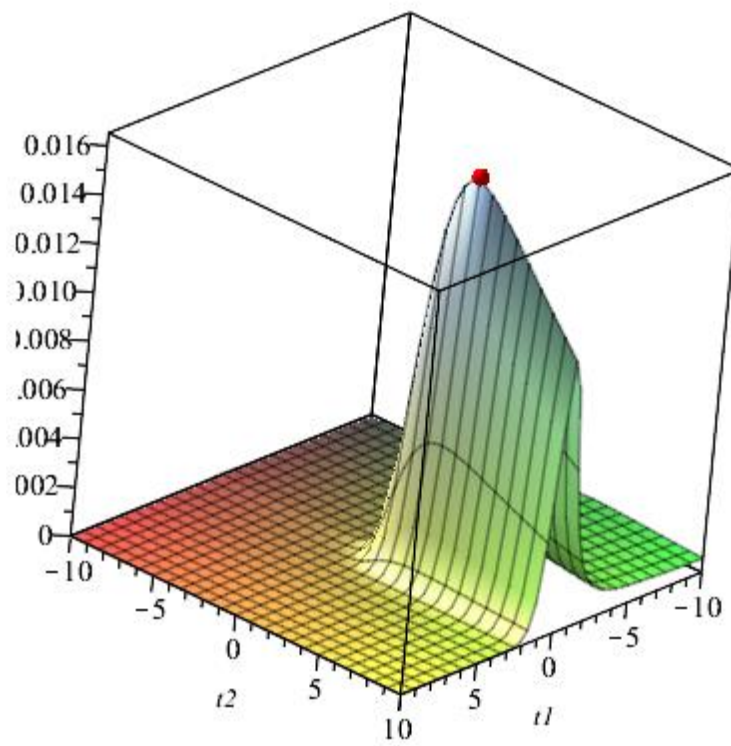


Gráfico 37

Na figura acima, observa-se um ponto de máximo finito com  $t_2 > t_1$ .

## 6 Estimativas dos parâmetros dos itens quando só conhecemos os padrões de resposta e usamos valores provisórios para as habilidades.

O que tipicamente acontece em uma avaliação é que não conhecemos os parâmetros dos itens e não sabemos qual a habilidade dos sujeitos, a única informação fornecida são as respostas.

Ao responder a uma série de itens, o indivíduo apresenta um padrão de respostas, composto por erros (valor 0) e acertos (valor 1).

Para calcular o valor da discriminação ( $a_i$ ) e da dificuldade ( $b_i$ ) de um item, precisaremos encontrar o ponto de máximo da função  $\varphi$ ; este ponto pertence e é perpendicular ao plano tangente no extremo, ou seja, sentido de maior crescimento da curva.

Isso é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}(a_i, b_i) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}(a_i, b_i) = 0 \end{cases}$$

Faremos uma análise de um pequeno caso com três itens e quatro indivíduos.

	<b>I1</b>	<b>I2</b>	<b>I3</b>
<b>T1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>T2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>T3</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>T4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Tabela 19

$$\begin{aligned} \varphi &= \prod_{i,j}^n P(U_{ij} = u_{ij}) = \prod_{i=1}^3 \left( \prod_{j=1}^4 P(U_{ij} = u_{ij}) \right) \\ &= f_1(t_1 a_1 b_1) f_1(t_2 a_1 b_1) f_1(t_3 a_1 b_1) (1 \\ &\quad - f_1(t_4 a_1 b_1) f_2(t_1 a_2 b_2) f_2(t_2 a_2 b_2) (1 - f_2(t_3 a_1 b_1)) (1 \\ &\quad - f_2(t_4 a_2 b_2) f_3(t_1 a_3 b_3) (1 \\ &\quad - f_3(t_2 a_3 b_3)) (1 - f_3(t_3 a_3 b_3)) (1 - f_3(t_4 a_3 b_3) \end{aligned}$$

$\varphi$  = valor de resposta, em função dos parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  dos itens e da habilidade  $t_i$  dos indivíduos.

$$f_1(t_1 a_1 b_1) f_1(t_2 a_1 b_1) f_1(t_3 a_1 b_1) (1 - f_1(t_4 a_1 b_1)) = \varphi_1$$

$$f_2(t_1 a_2 b_2) f_2(t_2 a_2 b_2) (1 - f_2(t_3 a_1 b_1)) (1 - f_2(t_4 a_2 b_2)) = \varphi_2$$

$$f_3(t_1 a_3 b_3) (1 - f_3(t_2 a_3 b_3)) (1 - f_3(t_3 a_3 b_3)) (1 - f_3(t_4 a_3 b_3)) = \varphi_3$$

Fazendo  $\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}$ , teremos as funções  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  como constantes, pois, não dependem de  $a_1$  nem de  $b_1$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \varphi_2 \varphi_3 \frac{\partial}{\partial a_1} [\varphi_1] = 0$$

Deste modo, quando igualamos a zero, o primeiro fator é simplificado e vemos que basta resolver

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} f_1(t_1 a_1 b_1) f_1(t_2 a_1 b_1) f_1(t_3 a_1 b_1) (1 - f_1(t_4 a_1 b_1)) = 0$$

O mesmo ocorrerá para quando estivermos olhando para  $b_1$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_1} f_1(t_1 a_1 b_1) f_1(t_2 a_1 b_1) f_1(t_3 a_1 b_1) (1 - f_1(t_4 a_1 b_1)) = 0$$

Dito isto, fica fácil perceber que também valerá para qualquer  $a_i$  e  $b_i$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0 \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = 0$$

Tornando os pares acima, independentes.

## 7 Aplicação da TRI com o uso do Excel.

Um dos objetivos dessa pesquisa é dar possibilidades para o professor de construir as notas de seus alunos usando a TRI. E a melhor maneira encontrada foi usando um complemento para o Excel, no site <https://sourceforge.net/projects/libirt/files/eirt/>. Este complemento para o Excel nos oferece um 'assistente' para fazermos a estimação dos itens e variáveis latentes das respostas dos sujeitos a um teste. O pacote de dados dicotômicos suporta os seguintes modelos: ML1 (modelo logístico de um parâmetro), o ML2 (modelo logístico de dois parâmetros) e o ML3 (modelo logístico de três parâmetros). Neste trabalho usaremos somente o ML3, porém existem outras possibilidades de utilização, por exemplo, para modelos politômicos, modelo Bock e o modelo graduado da Samejima. Dois métodos não paramétricos também são suportados. Os métodos de estimativa disponíveis são o MMLE (estimador de máxima verossimilhança marginal) e o BME (Bayes estimador modal, apenas para modelos dicotômicos), para a estimativa paramétrica de itens. Já o PMMLE (MMLE Penalizado) e a regressão do kernel (Nadaraya-Watson) para a estimativa de itens não paramétrico. E por fim, o EAP (expectativa a posteriori) e WMLE (estimador de máxima verossimilhança de Warm) para a previsão de variáveis latentes.

Para maiores informações de como acessar e obter o *eirt*, basta acessar: <https://sourceforge.net/projects/libirt/files/eirt/>

Escolhas dos Itens que Atendam aos Critérios da TRI e a amostra.

Ao pensar no processo de seleção dos itens que norteiam o estudo sobre a TRI, foi feita uma pesquisa com os alunos e verificado que esses não tinham tido contato com as questões do ENEM PPL-INEP/MEC (Exame para pessoas privadas de liberdade e jovens sob medida socioeducativa que inclua privação de liberdade). Esse ENEM tem como finalidade principal a Avaliação do Desempenho Escolar e Acadêmico ao fim do Ensino Médio. A prova selecionada foi o ENEM PPL 2016; desta avaliação foram retirados os 45 itens de matemática e suas tecnologias, aplicados aos alunos voluntários em 23/11/2017, tais discentes, que estão finalizando o ensino médio em 2017, estudam no Colégio Estadual Caetano Belloni, localizado no município de São João de Meriti e no

Instituto Marcos Freitas (IMF) nas unidades localizadas nos municípios de Duque de Caxias e Rio de Janeiro, no bairro Recreio dos Bandeirantes. Ao todo, foram 153 alunos que compuseram o teste, tendo esta duração de 2h15min para a resolução dos itens. Vale ressaltar que utilizamos a ferramenta SuperPro®, um gerenciador de questões que possibilita ao professor rapidamente elaborar suas atividades e avaliação.

### Correção e Construção da planilha no Excel

A correção dos itens se deu de maneira dicotômica; assumindo os valores 1, quando o indivíduo  $j$  responde corretamente ao item  $i$ , ou 0 quando o indivíduo  $j$  não responde corretamente ao item  $i$ . Deste modo, torna-se mais fácil a análise do score, pois basta somente somar os valores 1. Assim como podemos ver na tabela a seguir.

Na primeira linha, temos a identificação dos itens, e na coluna os 153 alunos que responderam ao teste.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	I01	I02	I03	I04	I05	I06	I07	I08	I09	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18	I19	I20
2	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
7	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
8	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
9	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
10	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
11	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
13	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
14	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
15	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
16	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
17	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
18	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
19	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
20	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
21	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
22	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
23	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
24	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
26	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
27	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Figura 01

Após selecionar todos os campos, é necessário acessar a aba *eirt* para iniciar o complemento. Em seguida, aparecerá a tela da figura X, e, então, deve-se eleger a segunda opção como mostra a figura.

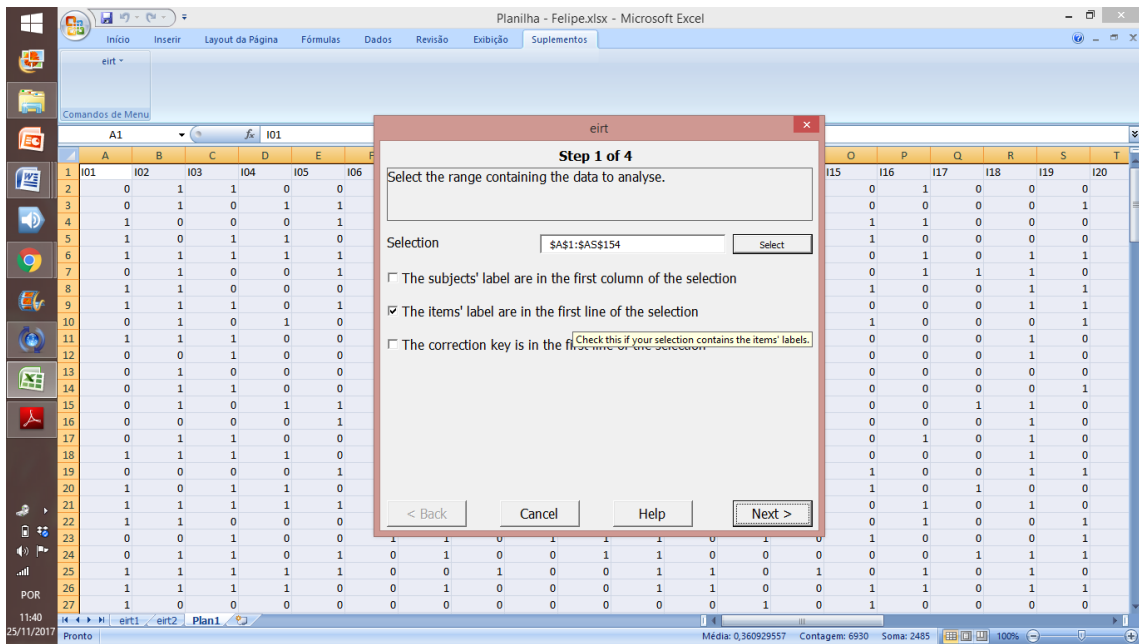


Figura 02

A seguir, é preciso selecionar os itens dicotômicos na primeira opção e confirmar que os itens corretos valem 1(um).

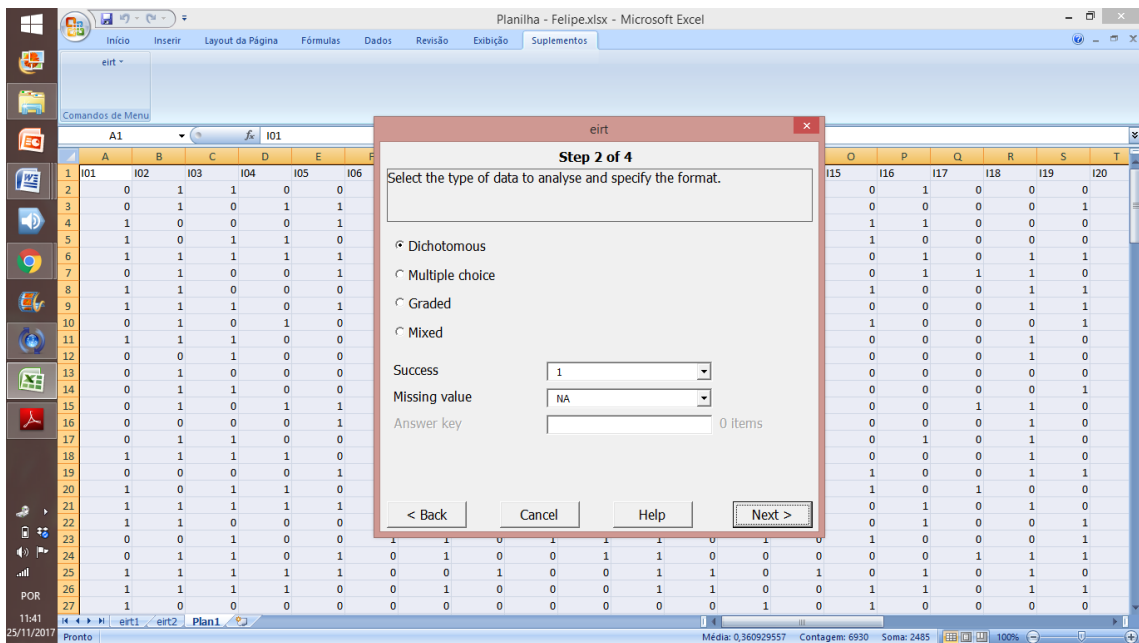


Figura 03

Na tela seguinte, há a opção de manusear os modelos de ML1 que vão trabalhar somente a dificuldade dos itens; ML2 que, além da dificuldade, também analisa a discriminação; e ML3 - o objeto deste estudo - que consegue verificar a dificuldade, discriminação e o acerto casual em cada item. O programa, ainda, nos dá a possibilidade de fazer uma



estimativa não paramétrica, utilizando a estimativa de Kennel ou a estimativa marginal penalizada.

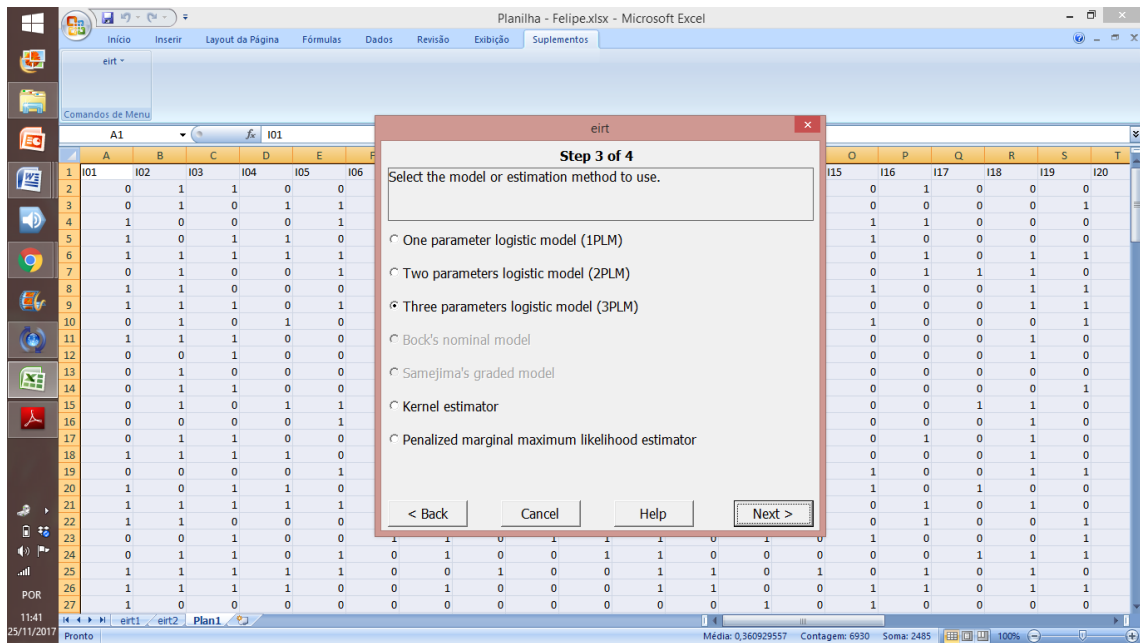


Figura 04

Logo após, teremos algumas opções, como:

- A teoria clássica dos testes;
- A Matriz de correlação;
- O score, onde teremos o somatório dos acertos;
- Teste de ajuste dos itens;
- Teste de independência local dos itens;
- A estimativa dos parâmetros;
- A estimativa da variável latente no caso o  $\theta$ ;
- As curvas características dos itens;
- E a função de informação dos itens;

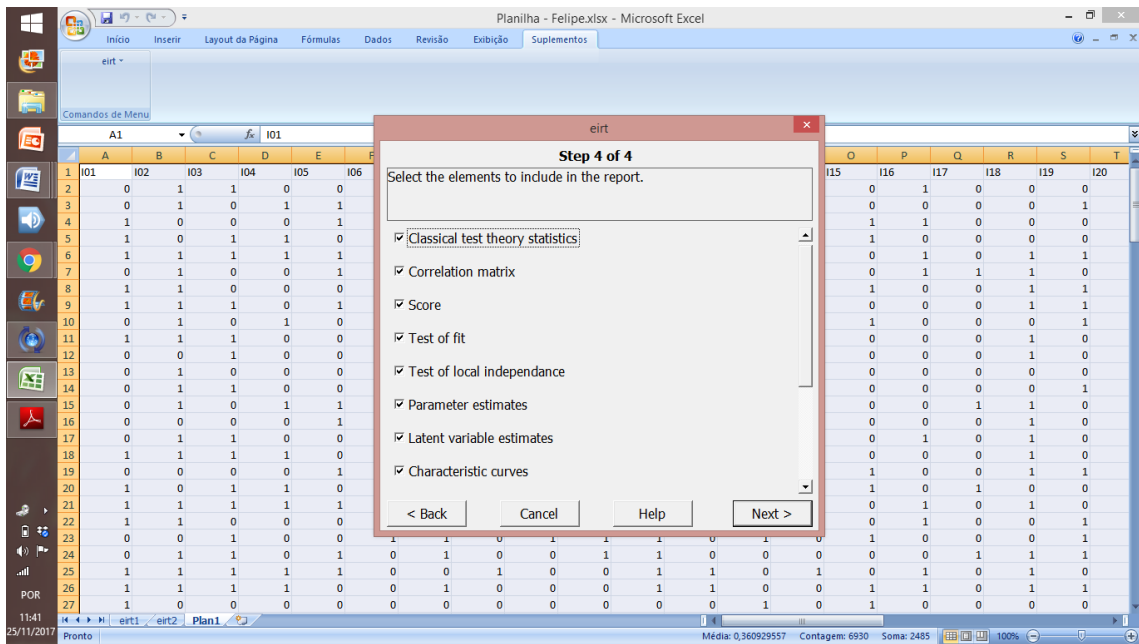


Figura 05

Ao fazer a seleção e apertar o botão NEXT (próximo) o programa nos dá a TRI e a estatística clássica do teste.

Na primeira página, encontra-se a estatística clássica, onde se apresenta o resultado dos 153 sujeitos que fizeram o teste. E nela há ainda a média de dificuldade, desvio padrão e a relação policereal dos itens. Pode-se considerar a correlação policereal como sendo a discriminação de cada item na teoria clássica.

É importante observar que, na teoria clássica, o item de menor dificuldade foi o I2 que apresentou uma média de 0,725 (ou seja, 72,5% dos indivíduos acertaram o item) e o de maior dificuldade foi o item I21 com média 0,098 (em torno de 10% de indivíduos acertaram).

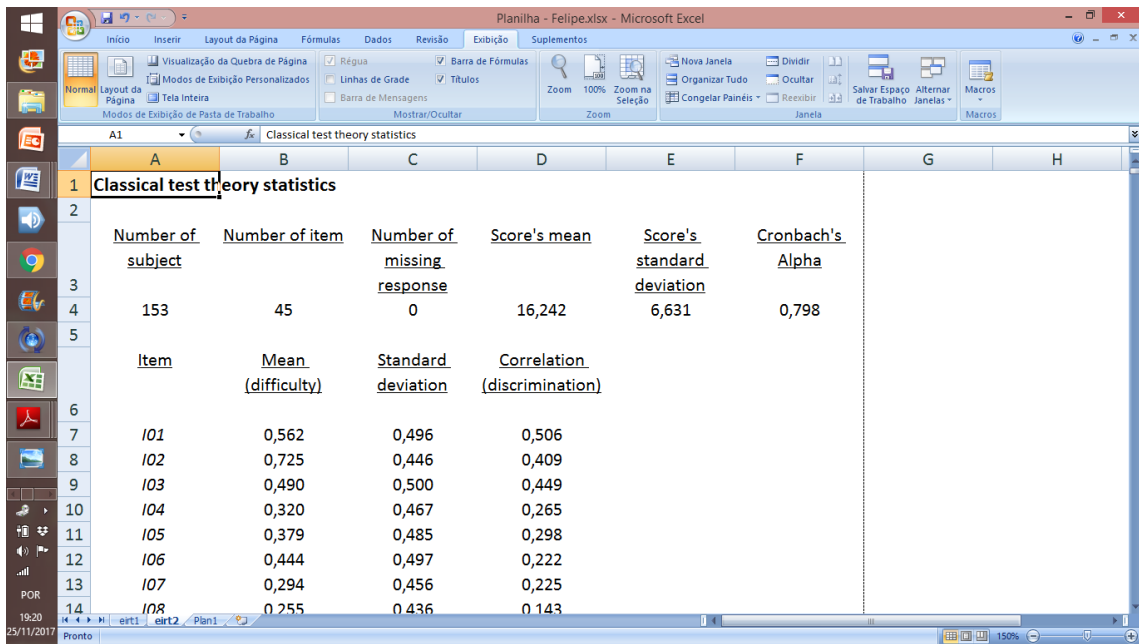


Figura 06

O score apresenta o somatório de acertos de cada indivíduo

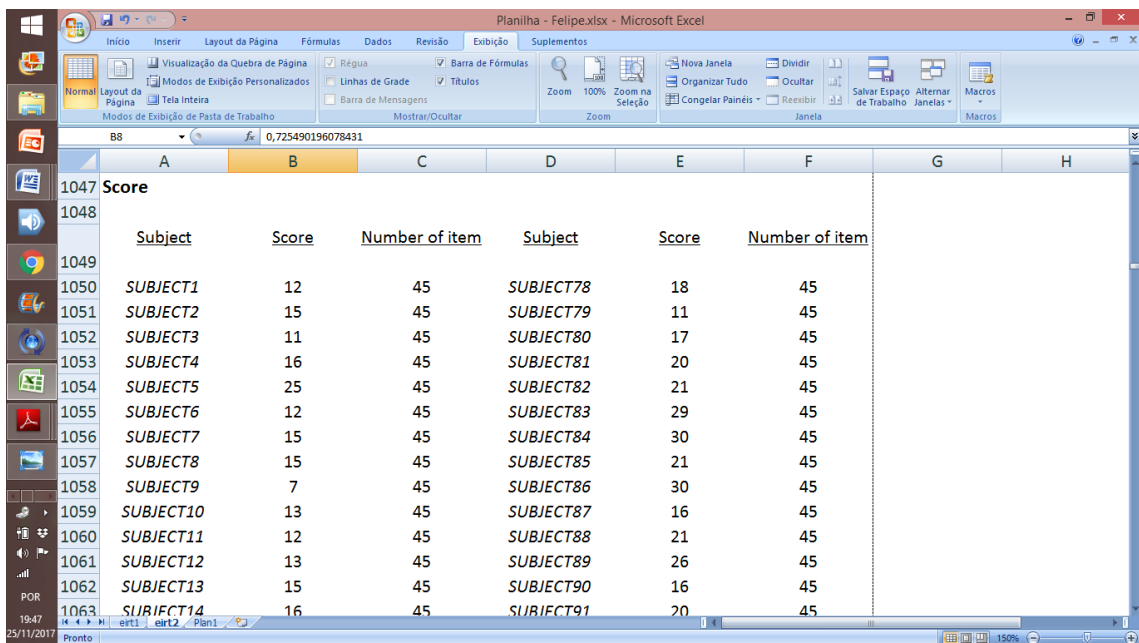


Figura 07

Convergingo para o modelo de três parâmetros (ML3).

Para a estimativa dos parâmetros o programa utiliza a EMB (estimativa modal Bayesiana), segundo Andrade e Valle

A estimação por máxima verossimilhança apresenta problemas na estimação de itens que são respondidos corretamente, ou incorretamente, por todos os

indivíduos, e também das habilidades de indivíduos que responderam corretamente, ou incorretamente, a todos os itens. Além disso, há a possibilidade de que as estimativas dos parâmetros dos itens caiam fora do intervalo esperado, tal como valores de  $a_i$  negativos, ou valores de  $c_i$  fora do intervalo  $[0; 1]$ . A metodologia bayesiana apresenta uma solução em que estes problemas são contornados.

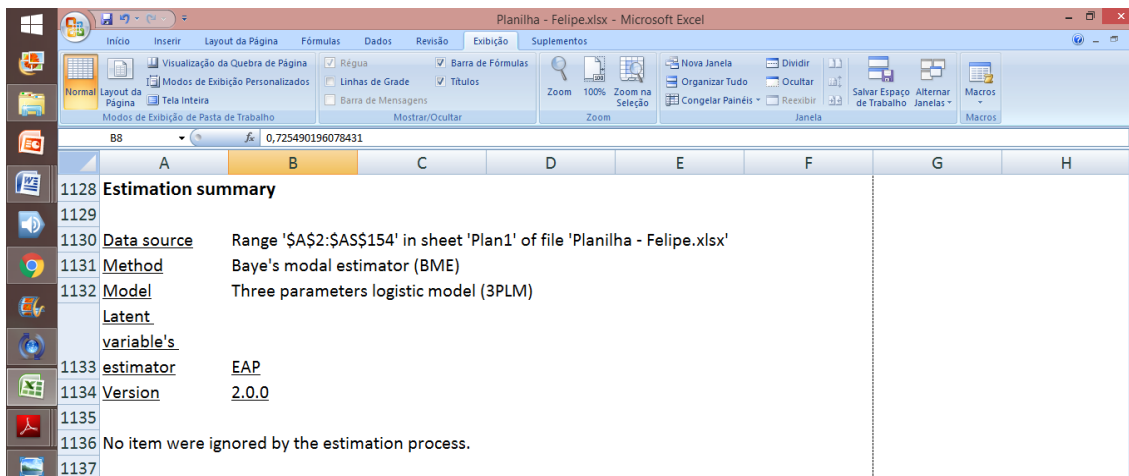


Figura 08

### Estimação dos Parâmetros dos Itens.

#### - Máxima Verossimilhança Marginal - MVM :

Possui propriedades assintóticas: as estimativas dos parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são consistentes;

Não está definido para itens com acerto total ou erro total;

É bastante trabalhoso computacionalmente;

Necessidade do estabelecimento de uma distribuição para  $\theta$ ;

Apresenta problemas na estimação do parâmetro  $c_i$  em alguns casos;

Deve ser usado somente com um número suficientemente grande de respondentes.

#### - Bayesiano:

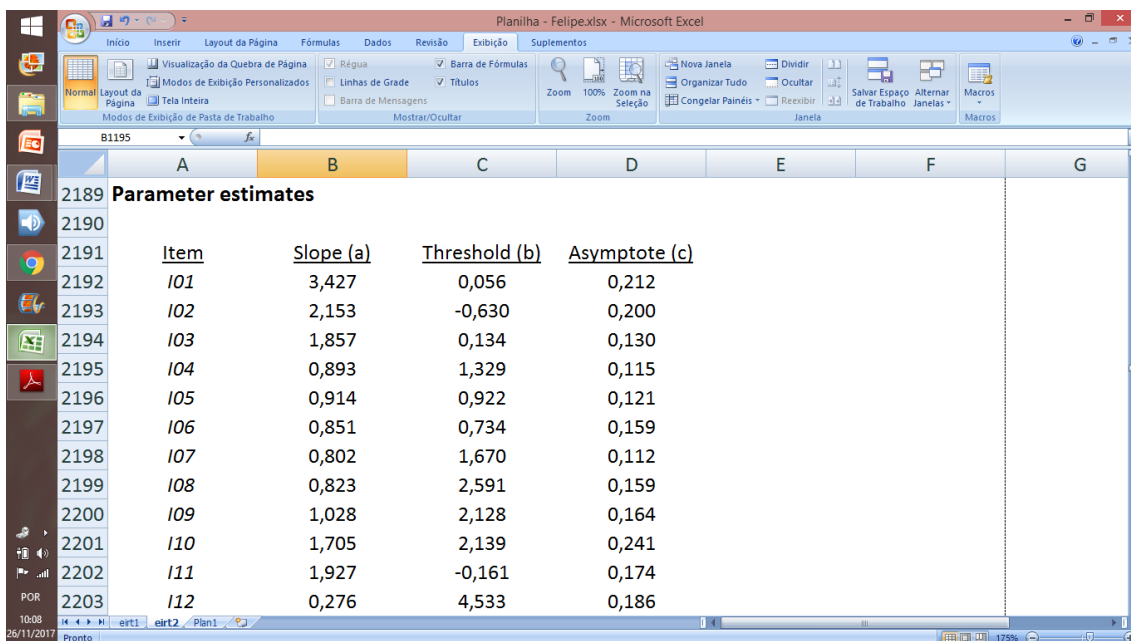
Definido para qualquer padrão de resposta;

É mais trabalhoso computacionalmente do que o MVM;

Necessidade de distribuições a priori para os parâmetros dos itens.

## 7.1 Estimação dos parâmetros dos itens

O método de estimação dos parâmetros dos itens é também a calibração dos itens. Na tabela a seguir, é possível ver as estimativas dos parâmetros dos itens ( $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ ) para cada um dos itens que estruturam o teste. O parâmetro  $a_i$  é o parâmetro de discriminação, isso significa que quanto maior o valor de  $a_i$  melhor será o poder de discriminar em cada item, os respondentes. É importante notar que nenhum item apresentou valor negativo para  $a_i$ , não havendo a necessidade de desconsiderar itens. É possível observar que o item que possui o maior valor para  $a_i$  são  $I_1, I_{14}, I_{17}, I_{34}$  e  $I_{45}$ . Em contrapartida, os itens que apresentam baixo potencial de discriminação são os itens  $I_{12}, I_{24}$  e  $I_{44}$ . Os itens que apresentaram a maior dificuldade com o parâmetro  $b_i$  foram  $I_{12}, I_{38}$  e  $I_{44}$ . Já os de menor dificuldade foram os itens  $I_2, I_{18}$  e  $I_{23}$ . A dificuldade dos itens apresentaram seus valores entre - 4 e 4, numa escala (0,1), ou seja, média igual a zero e desvio padrão igual 1. É possível observar ainda que o parâmetro  $c_i$  apresentou normalidade tendo seus valores entre 0 e 1.



Item	Slope (a)	Threshold (b)	Asymptote (c)
101	3,427	0,056	0,212
102	2,153	-0,630	0,200
103	1,857	0,134	0,130
104	0,893	1,329	0,115
105	0,914	0,922	0,121
106	0,851	0,734	0,159
107	0,802	1,670	0,112
108	0,823	2,591	0,159
109	1,028	2,128	0,164
110	1,705	2,139	0,241
111	1,927	-0,161	0,174
112	0,276	4,533	0,186

Figura 09

<b>Parameter estimates</b>			
<u>Item</u>	<u>Slope (a)</u>	<u>Threshold (b)</u>	<u>Asymptote (c)</u>
<i>I01</i>	3,427	0,056	0,212
<i>I02</i>	2,153	-0,630	0,200
<i>I03</i>	1,857	0,134	0,130
<i>I04</i>	0,893	1,329	0,115
<i>I05</i>	0,914	0,922	0,121
<i>I06</i>	0,851	0,734	0,159
<i>I07</i>	0,802	1,670	0,112
<i>I08</i>	0,823	2,591	0,159
<i>I09</i>	1,028	2,128	0,164
<i>I10</i>	1,705	2,139	0,241
<i>I11</i>	1,927	-0,161	0,174
<i>I12</i>	0,276	4,533	0,186
<i>I13</i>	0,806	1,196	0,139
<i>I14</i>	2,559	0,731	0,223
<i>I15</i>	1,991	0,955	0,264
<i>I16</i>	1,840	0,588	0,114
<i>I17</i>	3,170	1,230	0,141
<i>I18</i>	1,406	-0,029	0,162
<i>I19</i>	1,739	0,238	0,145
<i>I20</i>	1,867	1,662	0,184
<i>I21</i>	0,885	13,242	0,106
<i>I22</i>	0,742	2,144	0,176
<i>I23</i>	1,777	-0,038	0,262
<i>I24</i>	0,604	1,889	0,181
<i>I25</i>	1,395	0,840	0,154
<i>I26</i>	2,278	0,601	0,135
<i>I27</i>	2,239	0,670	0,070
<i>I28</i>	1,177	-0,138	0,135
<i>I29</i>	0,884	20,232	0,309

I30	0,703	1,907	0,165
I31	1,624	1,450	0,134
I32	0,966	2,979	0,132
I33	0,738	0,497	0,161
I34	6,101	1,041	0,150
I35	1,839	1,887	0,219
I36	0,846	2,919	0,163
I37	0,970	0,735	0,175
I38	1,544	3,360	0,226
I39	0,961	1,685	0,151
I40	0,499	2,622	0,172
I41	2,278	1,044	0,078
I42	0,884	18,547	0,281
I43	2,261	1,112	0,218
I44	0,587	3,269	0,146
I45	3,435	0,643	0,261

Tabela 20

## 7.2 Estimação das habilidades

Um dos principais resultados obtidos, ao utilizar o assistente do Excel, é a estimação das habilidades dos respondentes. Na tabela a seguir, é possível verificar cada uma das habilidades dos 153 participantes do teste. É fácil observar, para as habilidades, valores positivos e negativos, talvez isso cause espanto aos menos desavisados, isso por que a escala que estamos usando é a (0,1) esse é o par que denota uma média 0 (zero) e um desvio padrão de 1 (um). Ao selecionar um valor qualquer da tabela, por exemplo o participante de número 100, sua habilidade é de 1,923. Isso quer dizer que ele está a 1,923 desvios padrões acima da média das habilidades, que é igual a 0 (zero). Deste modo podemos concluir que alguém que apresenta uma nota negativa está abaixo da média da habilidade que fixamos inicialmente. A fim de facilitar a compreensão dessas notas, é viável fazer a alteração dessa escala. A avaliação de maior notoriedade atualmente no país e que faz essa mudança é o ENEM que utiliza a escala (500,100); de modo que, um candidato que recebeu nota 300 em uma avaliação, isto significa que o mesmo teve um desempenho de dois desvios padrões abaixo do valor de referência, já um candidato com uma nota 750 teve dois desvios padrões e meio acima do valor de referência.

Ainda na tabela, temos a classificação dos respondentes tanto pela teoria clássica dos testes (TCT) como pela TRI, e é possível notar que os dois primeiros colocados estão com a mesma classificação. Já na última coluna da tabela, foi feita uma comparação dos alunos que obtiveram a mesma classificação na TCT e na TRI com o número 1 para classificações iguais e 0 para classificações diferentes, como por exemplo o aluno de número 73 que ocupa a 3ª colocação na teoria clássica e na 12ª colocação na TRI. Observa-se ainda que alguns indivíduos tiveram as classificações bem próximas como é o caso do indivíduo 84 que foi o 5º colocado na Teoria clássica e 6º colocado na TRI.

1º.	111	37	111	2,494	1
2º.	100	34	100	1,923	1
3º.	73	31	109	1,506	0
4º.	112	31	112	1,427	1
5º.	84	30	107	1,423	0
6º.	86	30	84	1,404	0
7º.	83	29	93	1,365	0
8º.	114	29	86	1,336	0
9º.	93	27	103	1,306	0



10º.	109	27	83	1,229	0
11º.	44	26	114	1,173	0
12º.	71	26	73	1,103	0
13º.	89	26	110	0,979	0
14º.	104	26	104	0,960	1
15º.	107	26	71	0,934	0
16º.	5	25	53	0,929	0
17º.	53	25	74	0,884	0
18º.	72	25	102	0,846	0
19º.	74	25	72	0,780	0
20º.	102	25	44	0,761	0
21º.	103	24	101	0,746	0
22º.	110	24	5	0,746	0
23º.	43	23	91	0,735	0
24º.	60	23	82	0,711	0
25º.	61	23	89	0,702	0
26º.	68	23	105	0,634	0
27º.	101	23	113	0,621	0
28º.	94	22	39	0,613	0
29º.	96	22	59	0,610	0
30º.	113	22	68	0,569	0
31º.	50	21	60	0,561	0
32º.	57	21	85	0,560	0
33º.	58	21	94	0,546	0
34º.	59	21	58	0,523	0
35º.	64	21	61	0,521	0
36º.	66	21	43	0,506	0
37º.	82	21	96	0,491	0
38º.	85	21	64	0,449	0
39º.	88	21	20	0,436	0
40º.	105	21	31	0,427	0
41º.	17	20	66	0,419	0
42º.	23	20	47	0,405	0
43º.	39	20	35	0,400	0
44º.	47	20	98	0,398	0
45º.	62	20	80	0,387	0
46º.	65	20	25	0,381	0
47º.	81	20	57	0,375	0
48º.	91	20	95	0,373	0
49º.	97	20	23	0,343	0
50º.	98	20	81	0,331	0
51º.	99	20	99	0,326	1
52º.	21	19	17	0,324	0
53º.	31	19	76	0,292	0

54º.	49	19	65	0,290	0
55º.	67	19	50	0,280	0
56º.	76	19	62	0,274	0
57º.	92	19	97	0,258	0
58º.	95	19	21	0,245	0
59º.	22	18	78	0,238	0
60º.	51	18	88	0,226	0
61º.	56	18	8	0,203	0
62º.	78	18	67	0,156	0
63º.	20	17	24	0,144	0
64º.	25	17	92	0,121	0
65º.	55	17	29	0,054	0
66º.	80	17	16	0,053	0
67º.	4	16	32	0,045	0
68º.	14	16	10	0,037	0
69º.	16	16	27	0,030	0
70º.	24	16	22	0,022	0
71º.	29	16	37	-0,050	0
72º.	32	16	49	-0,051	0
73º.	42	16	87	-0,063	0
74º.	87	16	106	-0,088	0
75º.	90	16	13	-0,098	0
76º.	2	15	14	-0,103	0
77º.	7	15	90	-0,116	0
78º.	8	15	42	-0,183	0
79º.	13	15	69	-0,187	0
80º.	35	15	51	-0,209	0
81º.	69	15	139	-0,224	0
82º.	75	15	152	-0,257	0
83º.	124	15	7	-0,272	0
84º.	139	15	131	-0,307	0
85º.	149	15	1	-0,334	0
86º.	37	14	56	-0,339	0
87º.	152	14	75	-0,358	0
88º.	10	13	18	-0,369	0
89º.	12	13	6	-0,390	0
90º.	18	13	55	-0,432	0
91º.	19	13	63	-0,449	0
92º.	26	13	33	-0,453	0
93º.	27	13	54	-0,505	0
94º.	33	13	132	-0,509	0
95º.	77	13	4	-0,521	0
96º.	122	13	2	-0,533	0
97º.	131	13	77	-0,537	0

98º.	133	13	124	-0,553	0
99º.	144	13	41	-0,596	0
100º.	1	12	149	-0,605	0
101º.	6	12	45	-0,607	0
102º.	11	12	142	-0,609	0
103º.	30	12	12	-0,644	0
104º.	45	12	144	-0,654	0
105º.	52	12	48	-0,741	0
106º.	63	12	146	-0,748	0
107º.	70	12	116	-0,771	0
108º.	106	12	79	-0,788	0
109º.	108	12	11	-0,843	0
110º.	132	12	108	-0,850	0
111º.	145	12	19	-0,872	0
112º.	147	12	15	-0,878	0
113º.	3	11	115	-0,885	0
114º.	28	11	70	-0,924	0
115º.	41	11	118	-0,927	0
116º.	54	11	9	-0,933	0
117º.	79	11	120	-0,948	0
118º.	116	11	52	-0,952	0
119º.	118	11	30	-0,955	0
120º.	125	11	134	-0,988	0
121º.	137	11	137	-0,994	1
122º.	142	11	141	-1,014	0
123º.	143	11	38	-1,036	0
124º.	15	10	122	-1,043	0
125º.	38	10	130	-1,050	0
126º.	46	10	46	-1,067	1
127º.	115	10	143	-1,089	0
128º.	121	10	150	-1,104	0
129º.	130	10	26	-1,144	0
130º.	136	10	3	-1,168	0
131º.	141	10	133	-1,181	0
132º.	146	10	147	-1,188	0
133º.	48	9	145	-1,193	0
134º.	134	9	128	-1,195	0
135º.	151	9	127	-1,204	0
136º.	117	8	28	-1,248	0
137º.	126	8	148	-1,256	0
138º.	127	8	121	-1,273	0
139º.	140	8	135	-1,280	0
140º.	9	7	123	-1,286	0
141º.	36	7	125	-1,290	0

142º.	40	7	140	-1,301	0
143º.	120	7	153	-1,325	0
144º.	129	7	36	-1,328	0
145º.	138	7	136	-1,353	0
146º.	148	7	40	-1,354	0
147º.	150	7	34	-1,415	0
148º.	153	7	129	-1,455	0
149º.	34	6	126	-1,460	0
150º.	128	6	151	-1,467	0
151º.	135	6	117	-1,686	0
152º.	123	5	138	-1,695	0
153º.	119	3	119	-1,724	1

Tabela 21

### 7.3 Análise das curvas características dos itens

A figura a seguir tem o objetivo de mostrar o comportamento dos 45 itens em um mesmo gráfico com suas respectivas CCI's. É importante observar que cada uma das curvas está diretamente relacionada com os parâmetros dos itens. Cada curva foi construída no intervalo de -4 a + 4 no eixo das abscissas que representam as habilidades dos indivíduos.

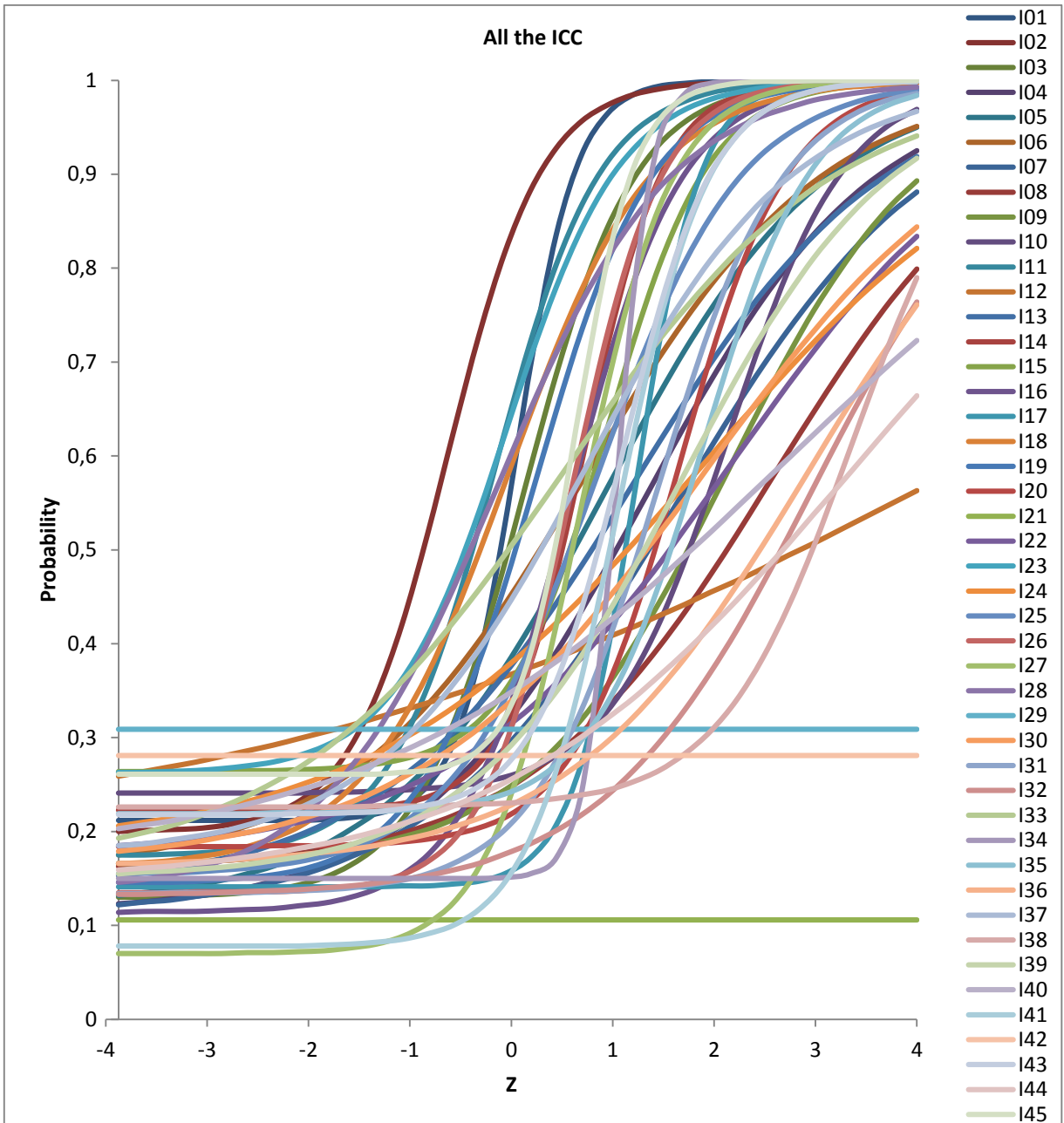
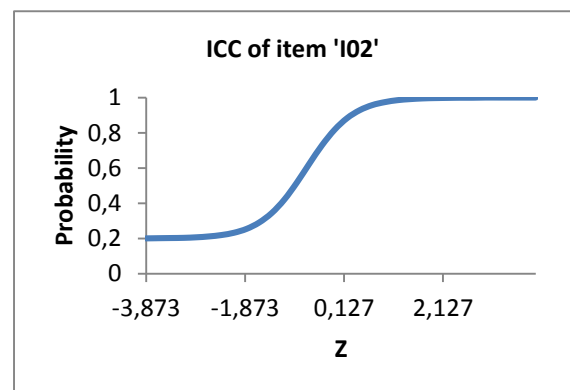
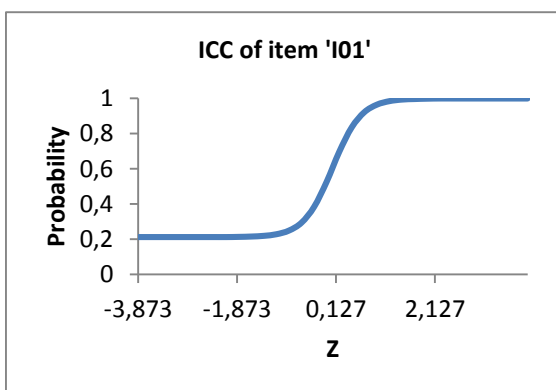
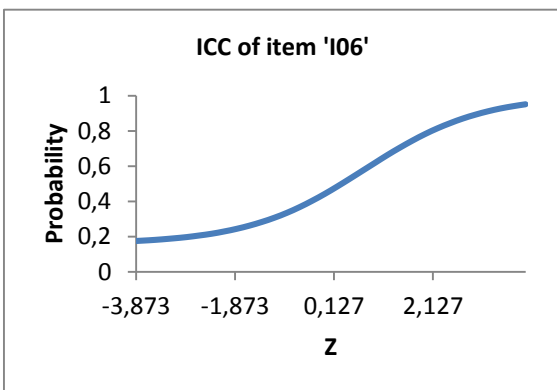
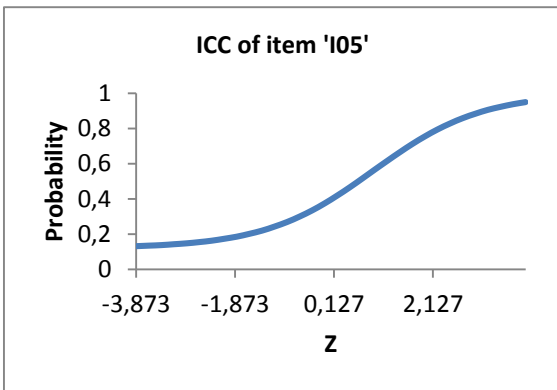
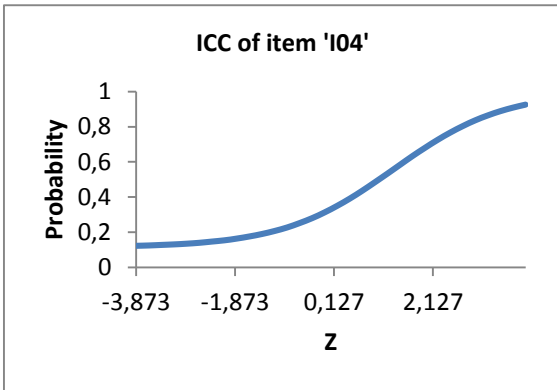
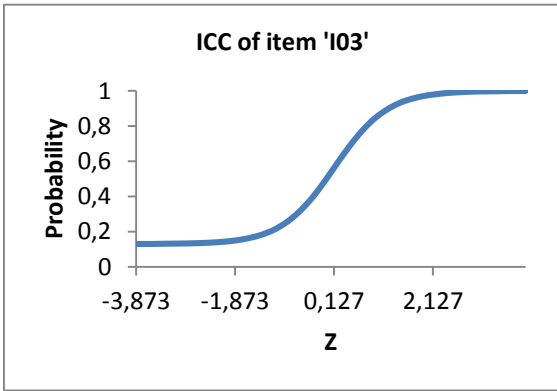
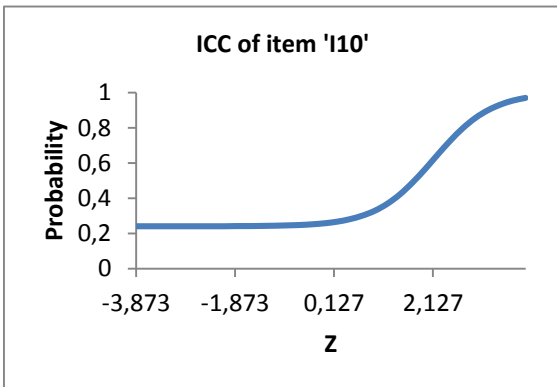
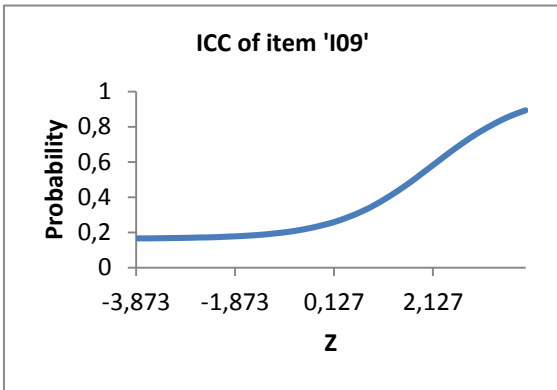
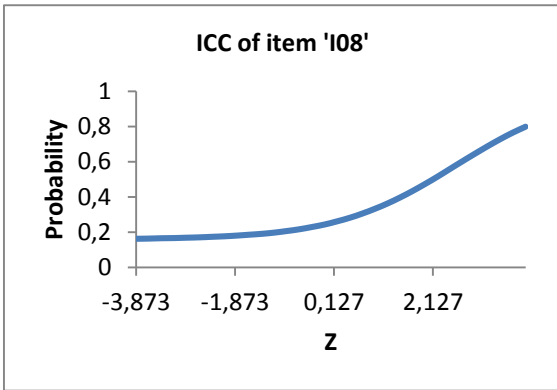
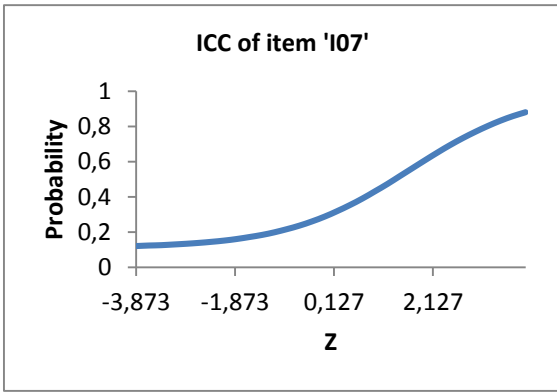
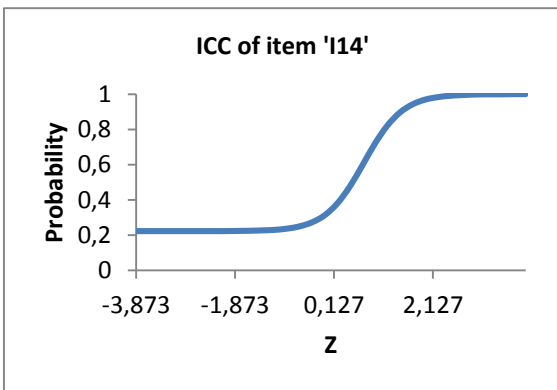
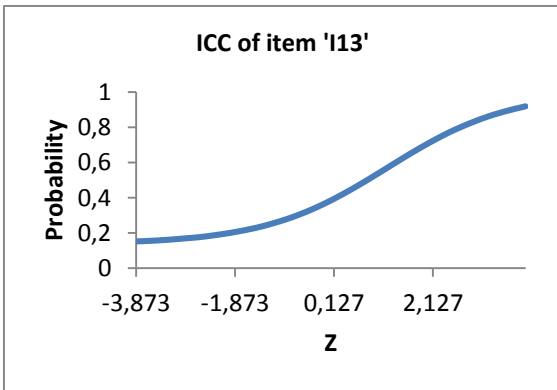
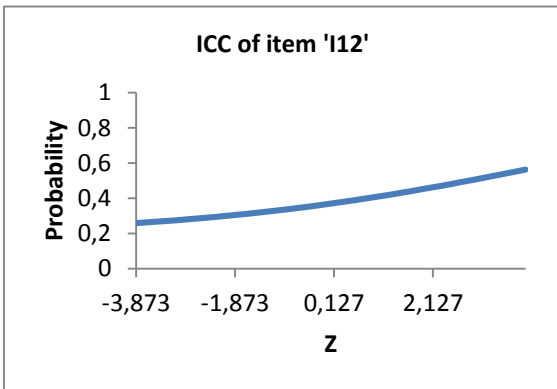
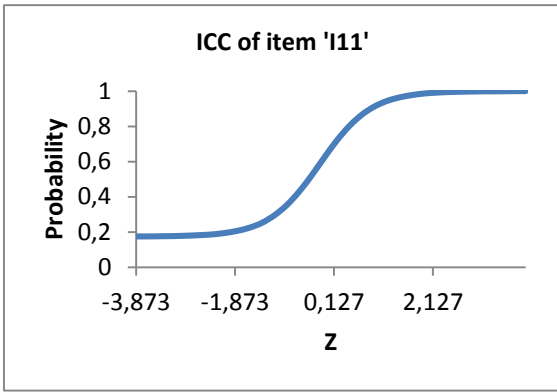


Gráfico 38

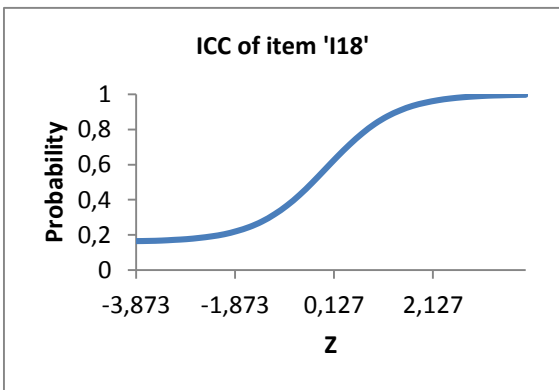
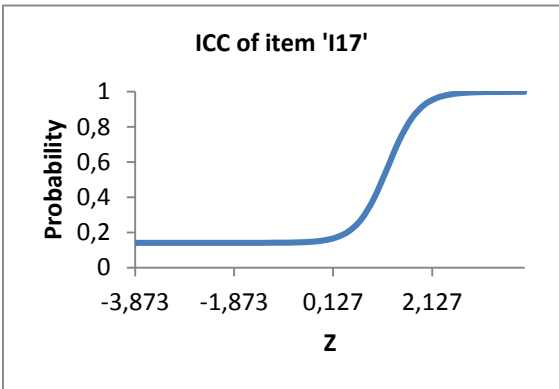
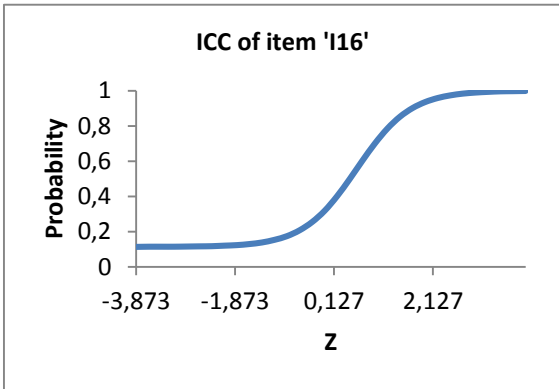
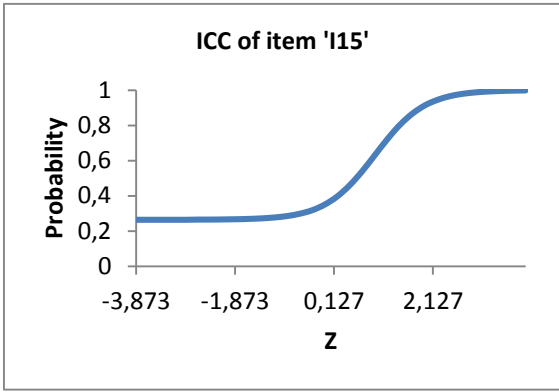


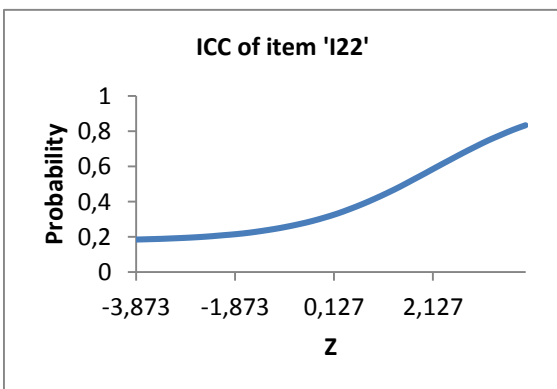
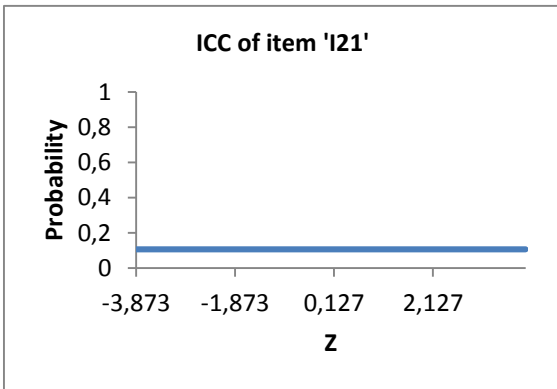
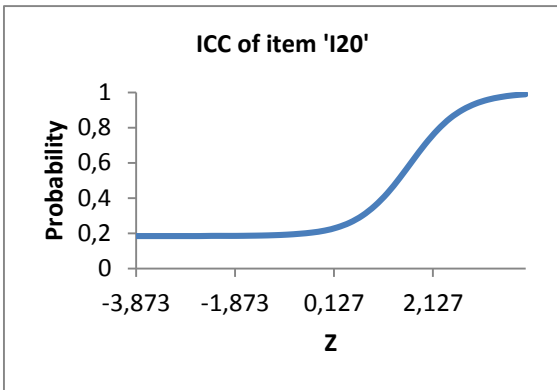
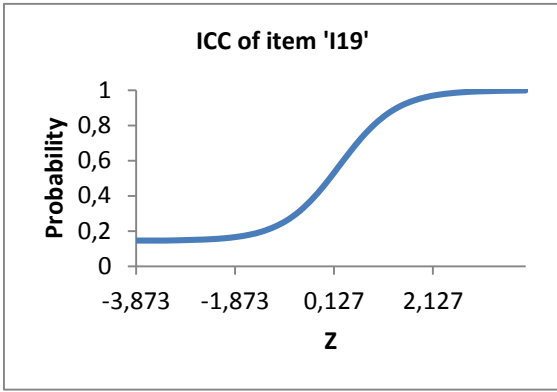


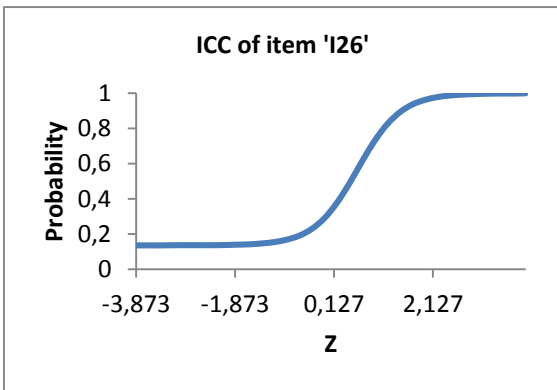
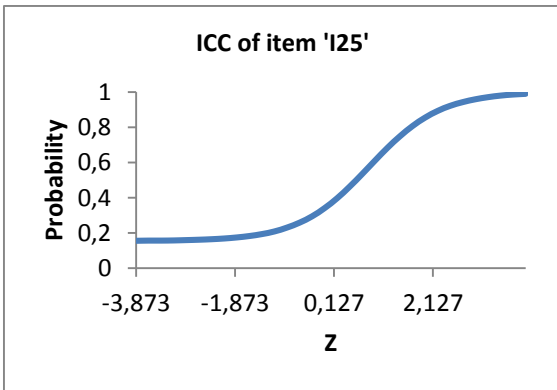
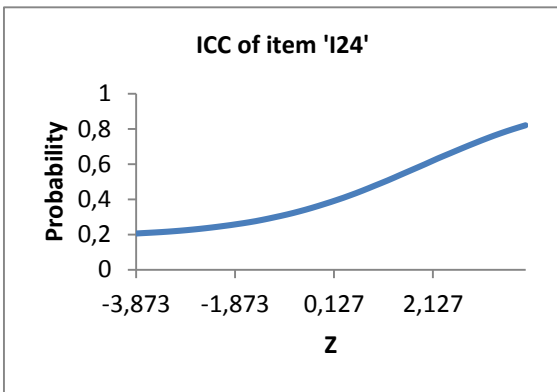
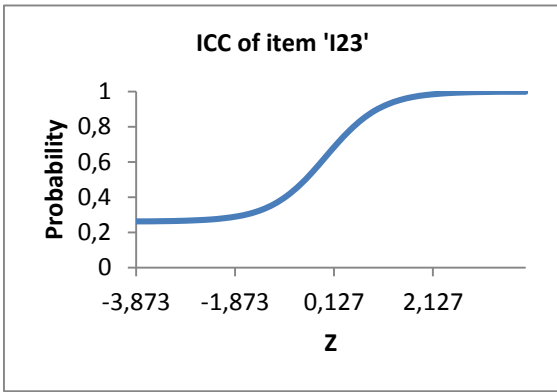


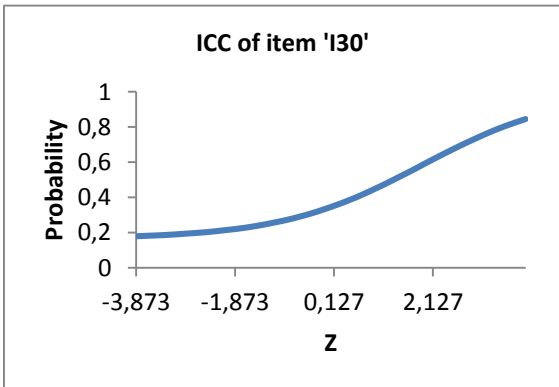
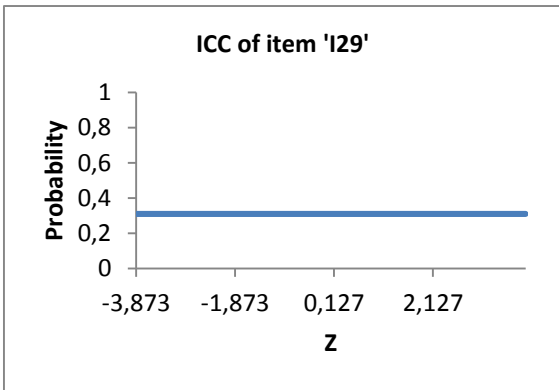
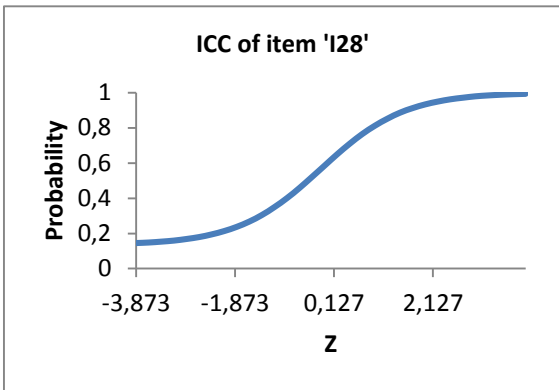
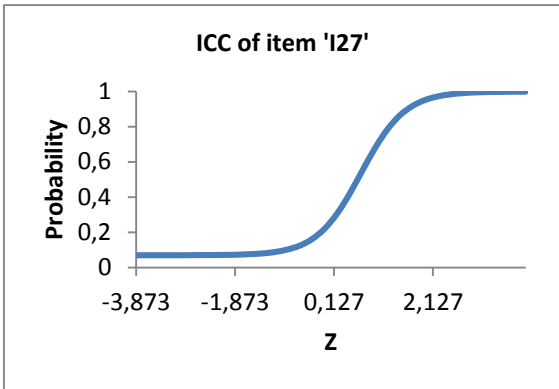


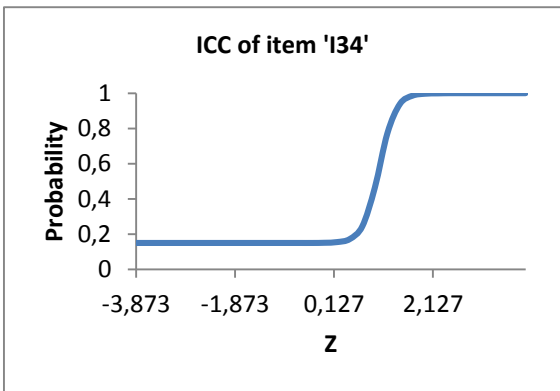
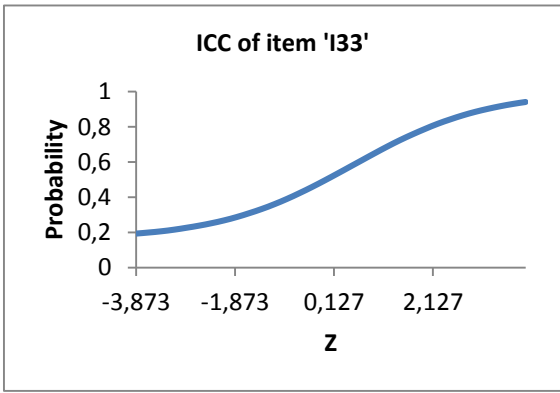
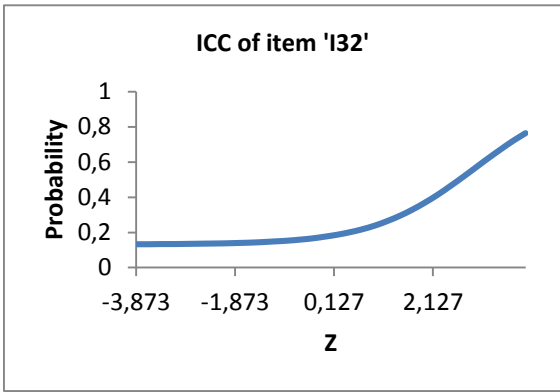
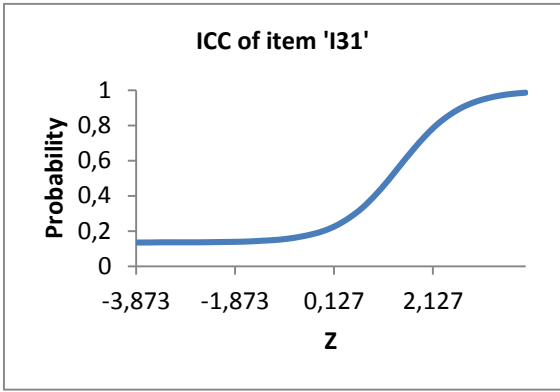


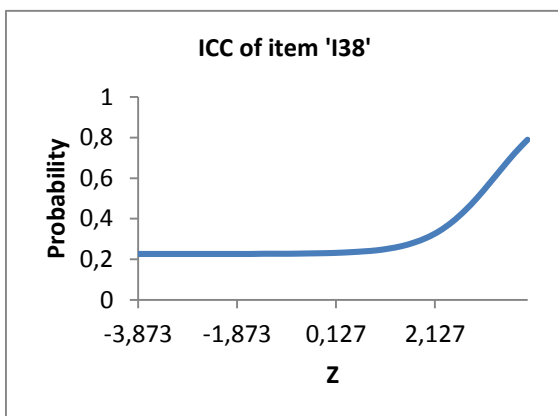
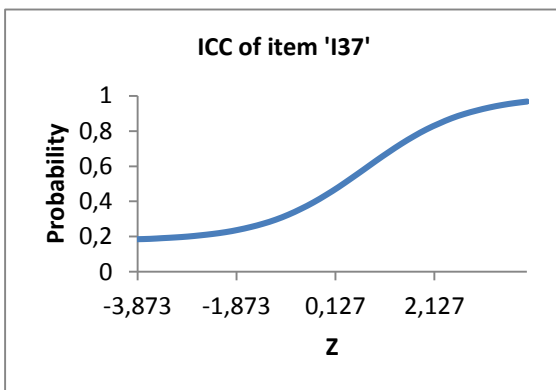
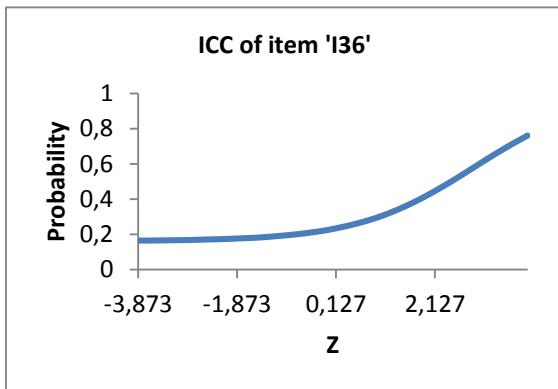
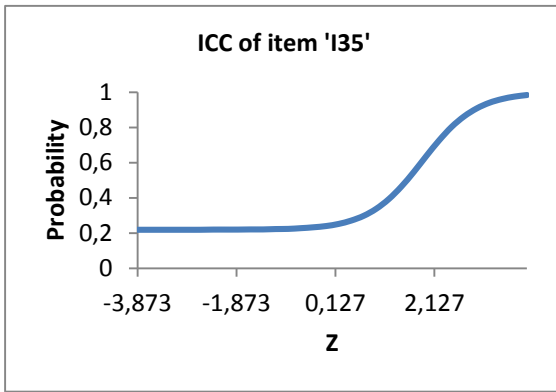


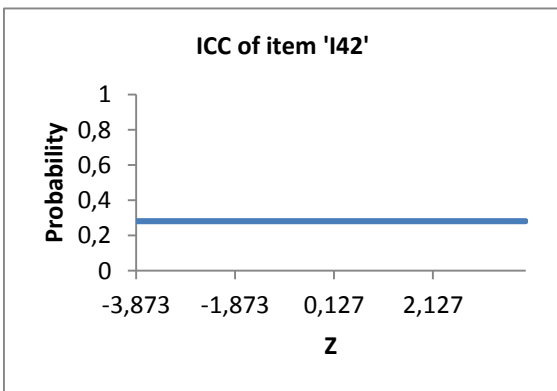
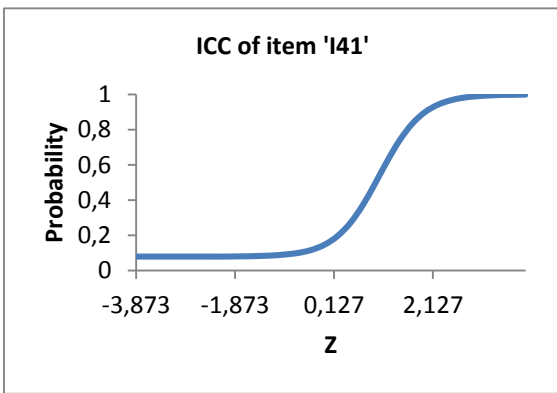
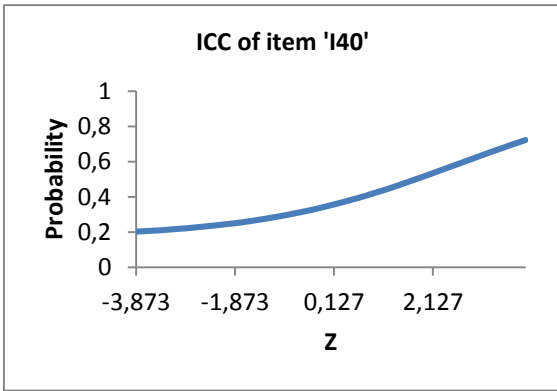
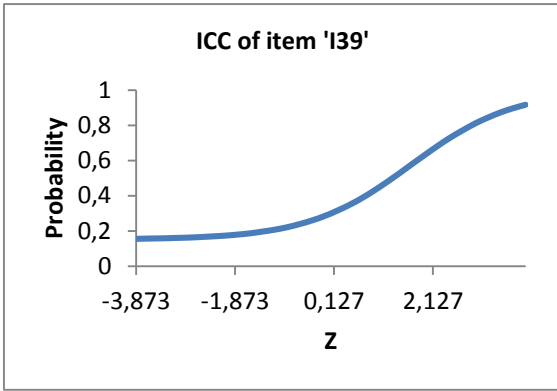


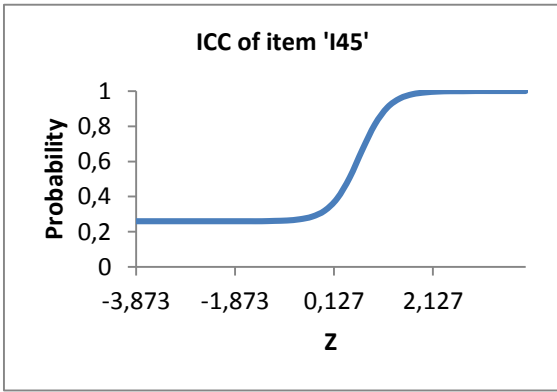
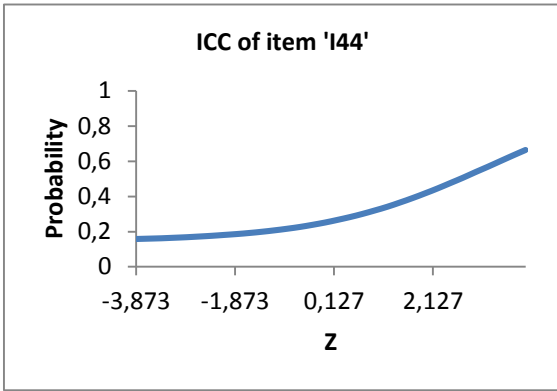
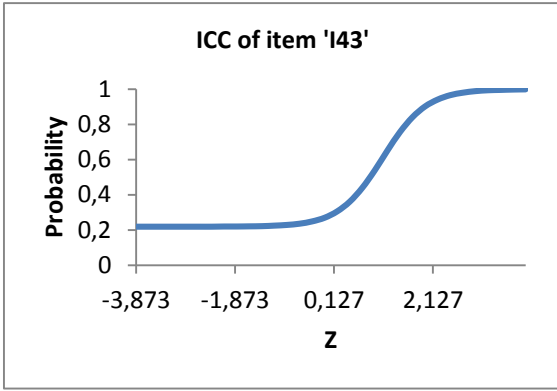














## CONCLUSÃO

Após a análise dos dados e dos resultados, ficou evidente que a melhor forma de avaliar os alunos é pela TRI. A fim de tornar as avaliações mais qualitativas, uma vez que o desempenho do indivíduo, que responde a uma avaliação, é analisado a partir de cada item aplicado; esses itens buscam analisar os traços latentes dos respondentes, permitindo assim que pessoas com o mesmo número de acertos tenham notas diferentes, diferenciando os indivíduos entre si.

Com as simulações feitas, com auxílio do software Maple, ficou evidente que a maior pontuação sempre é de quem acerta os itens mais fáceis, ou seja, quanto maior a coerência nas respostas, maior será sua nota no teste - dados dois indivíduos com o mesmo número de acertos. Deste modo, para os alunos que pretendem fazer provas que utilizem a TRI, como o ENEM, é preciso “varrer” toda a prova em busca das questões mais fáceis, para depois tentar as difíceis. Vale ressaltar, ainda, que o acerto casual eleva de modo mínimo a nota, contudo não se deve deixar nenhuma questão em branco, pois as mesmas serão consideradas como erradas.

A TRI vem sendo adotada em diversas provas atualmente, porém muitos professores ainda aplicam TCT por conveniência ou por não entenderem a metodologia da avaliação qualitativa, que é imperativa nas avaliações do ambiente escolar. Uma ferramenta fácil e simples de usar, o complemento para o Excel, possibilita ao professor construir as notas de seus alunos usando a TRI e essa foi a melhor maneira encontrada para fazermos a estimação dos itens e variáveis latentes das respostas dos sujeitos a um teste.

Sobretudo, a TRI permite comparar pessoas diferentes, mostrando como o processo de ensino-aprendizagem está evoluindo com os alunos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, D. F.; TAVARES, H. R.; VALLE, R. C. Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística - ABE, 2000.

MOREIRA JÚNIOR, F. Aplicações da Teoria de Resposta ao Item (TRI) no Brasil. In: Rev. Bras. Biom., São Paulo, v.28, n.137 4,2010. p.137-170.

DEMO, P. Teoria e Prática da Avaliação Qualitativa. In: PERSPECTIVAS, Campos dos Goytacazes, v.4, n.7, janeiro/julho 2005. p. 106-115.

LORD, F. M. A theory of test scores. Minnesota: Psychometric Society, 1952.

MACEDO, L. Eixos teóricos que estruturam o ENEM: conceitos principais. Brasília: MEC/INEP, 1999.

Maple. Software de Geometria Dinâmica. Disponível em:  
<<https://www.maplesoft.com/products/Maple/>> . Acesso em 15 de janeiro de 2017

Ministério da Educação. Disponível em :  
<<http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/34530>>

Acesso em 12 de março de 2017

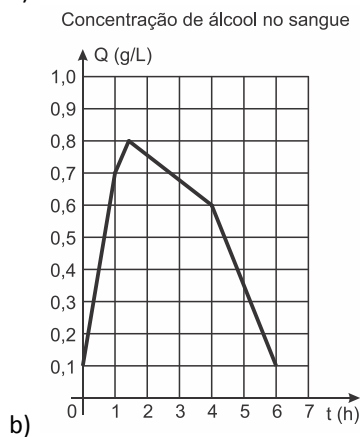
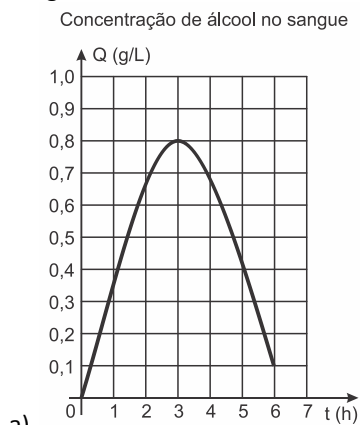
PASQUALI, L., PRIMI, R. **Fundamentos da Teoria da Resposta ao Item – TRI**. Disponível em:  
<[http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1677-04712003000200002](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1677-04712003000200002)> Acesso em 23 de junho de 2017

## Apêndice

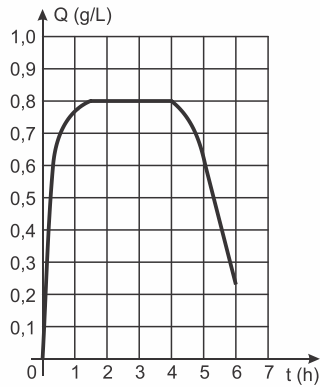
### Prova ENEM PPL aplicada a 153 alunos.

1. O Código de Trânsito de certo país estabelece penas para quem conduzir veículo automotor na via pública, estando com concentração de álcool no sangue igual ou superior a 0,6 grama por litro. Um pesquisador monitorou um indivíduo que ingeriu bebida alcoólica somente após o jantar. Exames realizados no sangue desse indivíduo mostraram que a concentração  $Q$  de álcool no sangue, dada em grama por litro, aumentou durante 1 hora e meia. Depois disso, começou a diminuir e atingiu a concentração permitida para dirigir, três horas após a ingestão de álcool.

Um gráfico que pode representar a relação entre o tempo após a ingestão e a concentração de álcool no sangue desse indivíduo é

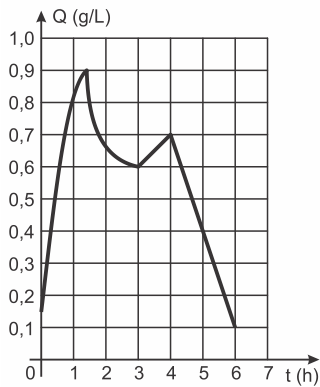


Concentração de álcool no sangue



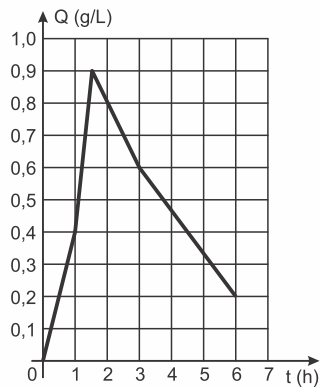
c)

Concentração de álcool no sangue



d)

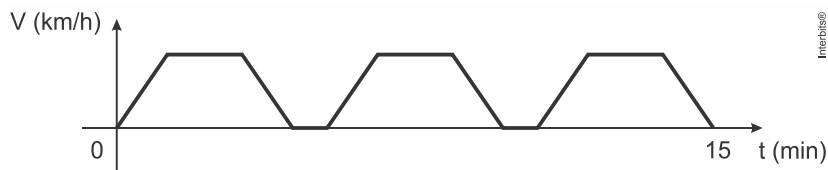
Concentração de álcool no sangue



e)

2. Um semáforo é composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender.

O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.

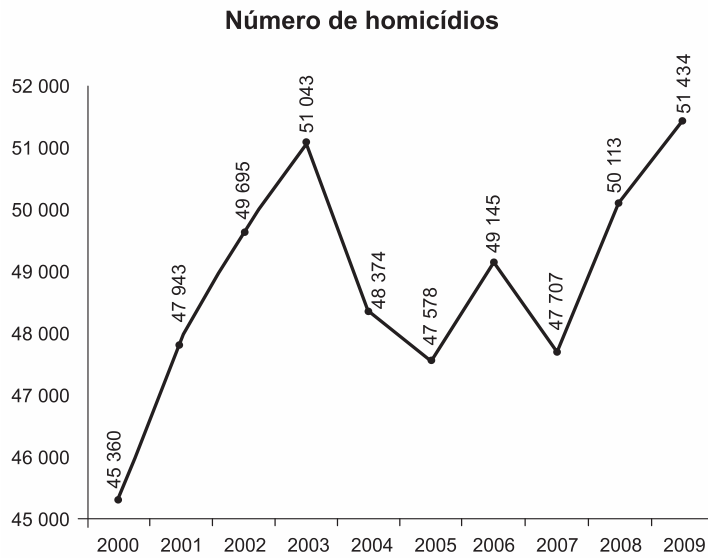


Em quantos semáforos ele parou?

a) 2

- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

3. Ano após ano, muitos brasileiros são vítimas de homicídio no Brasil. O gráfico apresenta a quantidade de homicídios registrados no Brasil, entre os anos 2000 e 2009.

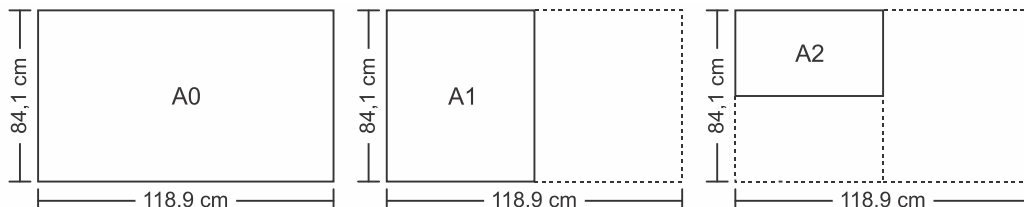


WAISELFISZ, J. J. *Mapa da violência 2012: os novos padrões da violência homicida no Brasil*. São Paulo: Instituto Sangari, 2011 (adaptado).

Se o maior crescimento anual absoluto observado nessa série se repetisse de 2009 para 2010, então o número de homicídios no Brasil ao final desse período seria igual a

- a) 48.839.
- b) 52.755.
- c) 53.840.
- d) 54.017.
- e) 54.103.

4. O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm x 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: <http://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

- a) 8
- b) 16

- c) 64
- d) 128
- e) 256

5. A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado  $z$  m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro das anteriores, permitindo uma vazão de  $400 \text{ m}^3/\text{s}$ . O cálculo da vazão  $V$  (em  $\text{m}^3/\text{s}$ ) é dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em  $\text{m}^2$ ) e a velocidade da água (em  $\text{m}/\text{s}$ ).

Supondo que a velocidade da água não se alterou, qual era a vazão máxima nas galerias antes das reformas?

- a)  $25 \text{ m}^3/\text{s}$
- b)  $50 \text{ m}^3/\text{s}$
- c)  $100 \text{ m}^3/\text{s}$
- d)  $200 \text{ m}^3/\text{s}$
- e)  $300 \text{ m}^3/\text{s}$

6. O quadro apresenta cinco cidades de um estado, com seus respectivos números de habitantes e quantidade de pessoas infectadas com o vírus da gripe. Sabe-se que o governo desse estado destinará recursos financeiros a cada cidade, em valores proporcionais à probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso na cidade, estar infectada.

Cidade	I	II	III	IV	V
Habitantes	180.000	100.000	110.000	165.000	175.000
Infectados	7.800	7.500	9.000	6.500	11.000

Qual dessas cidades receberá maior valor de recursos financeiros?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

7. Em um campeonato de futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota zero ponto. Ganha o campeonato o time que tiver maior número de pontos. Em caso de empate no total de pontos, os times são declarados vencedores.

Os times R e S são os únicos com chance de ganhar o campeonato, pois ambos possuem 68 pontos e estão muito à frente dos outros times. No entanto, R e S não se enfrentarão na rodada final.

Os especialistas em futebol arriscam as seguintes probabilidades para os jogos da última rodada:

- R tem 80% de chance de ganhar e 15% de empatar;
- S tem 40% de chance de ganhar e 20% de empatar.

Segundo as informações dos especialistas em futebol, qual é a probabilidade de o time R ser o único vencedor do campeonato?

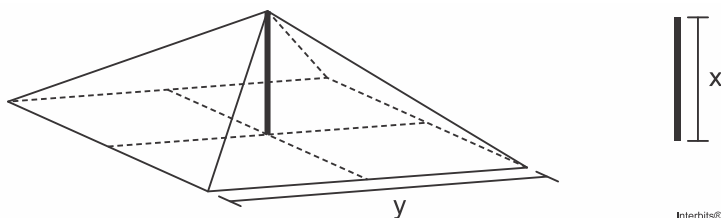
- a) 32%
- b) 38%
- c) 48%
- d) 54%
- e) 57%

8. Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler  $V - A + F = 2$ , em que  $V$ ,  $A$  e  $F$  são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

- a)  $2V - 4F = 4$
- b)  $2V - 2F = 4$
- c)  $2V - F = 4$
- d)  $2V + F = 4$
- e)  $2V + 5F = 4$

9. A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base  $y$ . A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida  $x$ . Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de  $y$  e  $x$ , é dada pela expressão

- a)  $2y \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
- b)  $2y \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$
- c)  $4y \sqrt{x^2 + y^2}$
- d)  $4 \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
- e)  $4 \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

10. A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.



Disponível em: [www.mauroweigel.blogspot.com](http://www.mauroweigel.blogspot.com).  
Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

- a) 97,0.
- b) 136,8.
- c) 173,7.
- d) 189,3.
- e) 240,0.

11. Na reforma e estilização de um instrumento de percussão, em formato cilíndrico (bumbo), será colada uma faixa decorativa retangular, como a indicada na Figura 1, suficiente para cobrir integralmente, e sem sobra, toda a superfície lateral do instrumento.

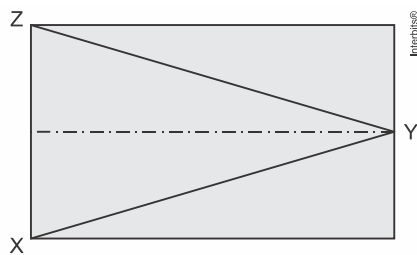
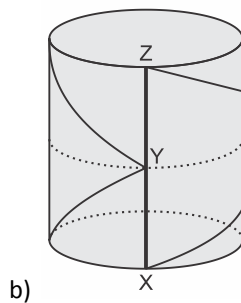
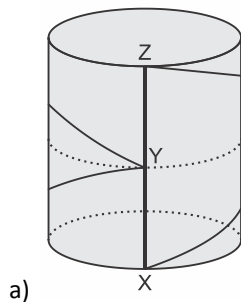
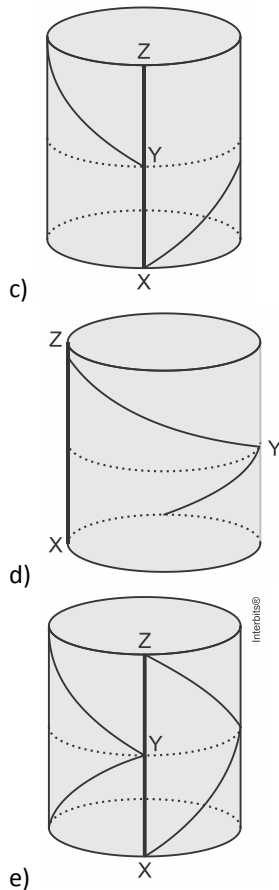


Figura 1

Como ficará o instrumento após a colagem?





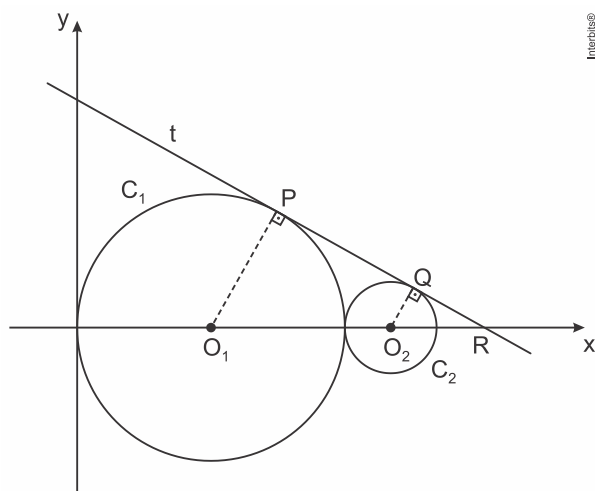


12. Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto  $O$ , origem do plano cartesiano  $xOy$ . Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de  $4 \text{ km/h}$ . A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de  $3 \text{ km/h}$ .

Após  $2$  horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

- a)  $(8; 0)$  e  $(0; 6)$ .
- b)  $(4; 0)$  e  $(0; 6)$ .
- c)  $(4; 0)$  e  $(0; 3)$ .
- d)  $(0; 8)$  e  $(6; 0)$ .
- e)  $(0; 4)$  e  $(3; 0)$ .

13. Na figura estão representadas, em um plano cartesiano, duas circunferências:  $C_1$  (de raio  $3$  e centro  $O_1$ ) e  $C_2$  (de raio  $1$  e centro  $O_2$ ), tangentes entre si, e uma reta  $t$  tangente às duas circunferências nos pontos  $P$  e  $Q$ .



Nessas condições, a equação da reta  $t$  é

- a)  $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
- b)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$
- c)  $y = -x + 4$
- d)  $y = -\frac{2}{3}x + 4$
- e)  $y = -\frac{4}{5}x + 4$

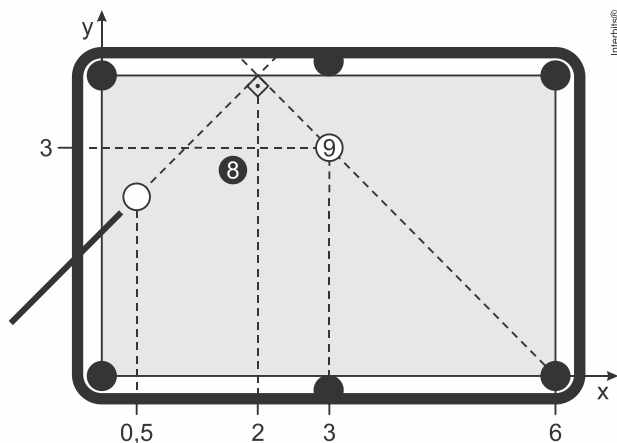
14. A volemia ( $v$ ) de um indivíduo é a quantidade total de sangue em seu sistema circulatório (coração, artérias, veias e capilares). Ela é útil quando se pretende estimar o número total ( $N$ ) de hemácias de uma pessoa, a qual é obtida multiplicando-se a volemia ( $v$ ) pela concentração ( $C$ ) de hemácias no sangue, isto é,  $N = v \times C$ . Num adulto normal essa concentração é de 5.200.000 hemácias por mL de sangue, conduzindo a grandes valores de  $N$ . Uma maneira adequada de informar essas grandes quantidades é utilizar a notação científica, que consiste em expressar  $N$  na forma  $N = Q \times 10^n$ , sendo  $1 \leq Q < 10$  e  $n$  um número inteiro. Considere um adulto normal, com volemia de 5.000 mL.

<http://perflin.com>. Acesso em: 23 fev. 2013 (adaptado)

Qual a quantidade total de hemácias desse adulto, em notação científica?

- a)  $2,6 \times 10^{-10}$
- b)  $2,6 \times 10^{-9}$
- c)  $2,6 \times 10^9$
- d)  $2,6 \times 10^{10}$
- e)  $2,6 \times 10^{11}$

15. Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de  $90^\circ$  com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.

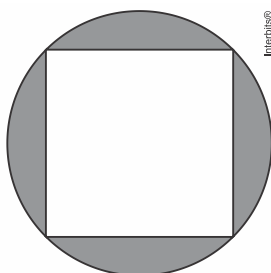


Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são (3; 3), o centro da caçapa de destino tem coordenadas (6; 0) e a abscissa da bola branca é 0,5, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

- a) 1,3.
- b) 1,5.
- c) 2,1.
- d) 2,2.
- e) 2,5.

16. Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada  $m^2$ . A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para  $\pi$ .

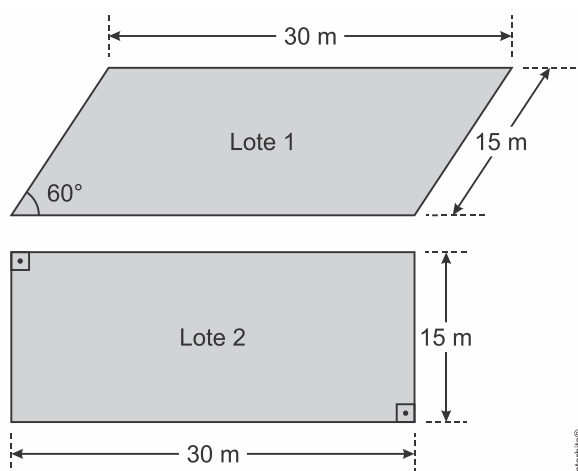


O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

- a) 100.
- b) 140.
- c) 200.
- d) 800.
- e) 1.000.

17. Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que esta família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos  $400 m^2$ . Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre

os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R\$ 100.000,00 e R\$ 150.000,00, respectivamente.



Use  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  e 1,7 como aproximações respectivamente, para  $\sin(60^\circ)$ ,  $\cos(60^\circ)$  e  $\sqrt{3}$ .

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

**Pai:** Devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

**Mãe:** Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

**Filho 1:** Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

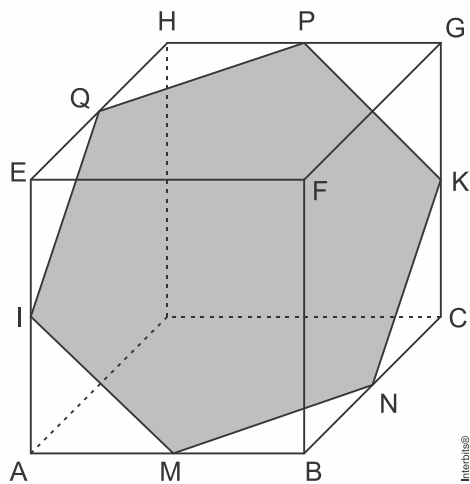
**Filho 2:** Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

**Corretor:** Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a)

- a) pai.
- b) mãe.
- c) filho 1.
- d) filho 2.
- e) corretor.

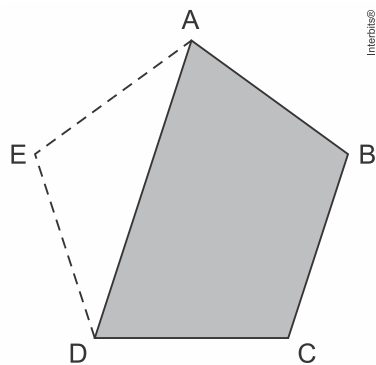
18. Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em construir um polígono  $IMNKPQ$ , no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa. Um esboço da sua obra pode ser visto na figura.



Considerando as diagonais do hexágono, distintas de  $IK$ , quantas têm o mesmo comprimento de  $IK$ ?

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 8
- e) 9

19. Um gessoiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.

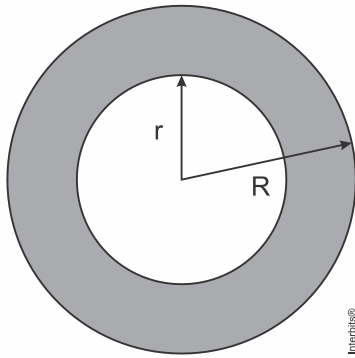


Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos  $x = \hat{EAD}$ ,  $y = \hat{EDA}$  e  $z = \hat{AED}$  do triângulo  $ADE$ .

As medidas  $x, y$  e  $z$ , em graus, desses ângulos são, respectivamente,

- a) 18, 18 e 108.
- b) 24, 48 e 108.
- c) 36, 36 e 108.
- d) 54, 54 e 72.
- e) 60, 60 e 60.

20. No projeto de arborização de uma praça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao seu redor, conforme ilustra a figura.



Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada.

A relação entre os raios do canteiro ( $R$ ) e da área central ( $r$ ) deverá ser

- a)  $R = 2r$
- b)  $R = r\sqrt{2}$
- c)  $R = \frac{r^2 + 2r}{2}$
- d)  $R = r^2 + 2r$
- e)  $R = \frac{3}{2}r$

21. Um ciclista **A** usou uma bicicleta com rodas com diâmetros medindo 60 cm e percorreu, com ela, 10 km. Um ciclista **B** usou outra bicicleta com rodas cujos diâmetros mediam 40 cm e percorreu, com ela, 5 km.

Considere 3,14 como aproximação para  $\pi$ .

A relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista **A** e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista **B** é dada por

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{2}{3}$
- c)  $\frac{3}{4}$
- d)  $\frac{4}{3}$
- e)  $\frac{3}{2}$

22. Tradicionalmente uma *pizza* média de formato circular tem diâmetro de 30 cm e é dividida em 8 fatias iguais (mesma área). Uma família, ao se reunir para o jantar, fará uma *pizza* de formato circular e pretende dividi-la em 10 fatias também iguais. Entretanto, eles desejam que cada fatia dessa *pizza* tenha o mesmo tamanho (mesma área) de cada fatia da *pizza* média quando dividida em 8 fatias iguais.

Qual o valor mais próximo do raio com que deve ser feita a *pizza*, em centímetro, para que eles consigam dividi-la da forma pretendida?

Use 2,2 como aproximação para  $\sqrt{5}$ .

- a) 15,00

- b) 16,50
- c) 18,75
- d) 33,00
- e) 37,50

23. O presidente de um time de futebol quer contratar um atacante para seu elenco e um empresário lhe ofereceu cinco jogadores. Ele deseja contratar o jogador que obteve a maior média de gols nos anos de 2010 a 2013.

O quadro apresenta o número de gols marcados nos anos de 2010 a 2013 por cada um dos cinco jogadores: I, II, III, IV e V.

Jogador	Número de gols em 2010	Número de gols em 2011	Número de gols em 2012	Número de gols em 2013
I	21	21	24	21
II	20	21	22	22
III	26	21	20	21
IV	23	23	19	18
V	16	21	26	16

O presidente do time deve contratar o jogador

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

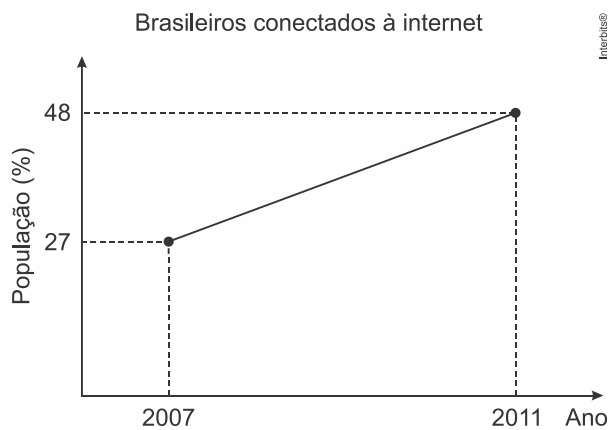
24. Em 20 de abril de 2010 ocorreu a explosão e afundamento de uma plataforma de petróleo semissubmersível, no Golfo do México. O acidente ocasionou um dos maiores desastres ecológicos mundiais, devido ao derrame de  $780.000 \text{ m}^3$  de óleo cru no mar, por um período de 87 dias, entre abril e julho de 2010. Finalizado o vazamento, parte do óleo vazado começou a ser queimado, diretamente, enquanto que outra parte foi removida por coleta, através de barcos filtradores. As duas técnicas juntas retiravam, aproximadamente,  $480 \text{ m}^3$  de óleo por dia. Durante todo o período de remoção foram retirados, no total, apenas  $66.705 \text{ m}^3$  de óleo. Por recomendação de ambientalistas, a retirada total de óleo não deveria ultrapassar 300 dias.

Disponível em: [www.popularmechanics.com](http://www.popularmechanics.com). Acesso em: 26 fev. 2013 (adaptado).

Para que todo o óleo derramado no Golfo pudesse ter sido retirado dentro do prazo recomendado pelos ambientalistas, qual deveria ter sido a taxa mínima de remoção de óleo, em metro cúbico/dia?

- a) 1.625
- b) 2.600
- c) 3.508
- d) 5.613
- e) 8.966

25. O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011.

A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a

- a) 56,40%.
- b) 58,50%.
- c) 60,60%.
- d) 63,75%.
- e) 72,00%.

26. Um motorista partiu da cidade **A** em direção à cidade **B** por meio de uma rodovia retilínea localizada em uma planície. Lá chegando, ele percebeu que a distância percorrida nesse trecho foi de 25 km. Ao consultar um mapa com o auxílio de uma régua, ele verificou que a distância entre essas duas cidades, nesse mapa, era de 5 cm.

A escala desse mapa é

- a) 1: 5
- b) 1: 1000
- c) 1: 5000
- d) 1: 100000
- e) 1: 500000

27. Em um mapa cartográfico, cuja escala é 1: 30.000, as cidades **A** e **B** distam entre si, em linha reta, 5 cm. Um novo mapa, dessa mesma região, será construído na escala 1: 20.000.

Nesse novo mapa cartográfico, a distância em linha reta entre as cidades **A** e **B**, em centímetro, será igual a

- a) 1,50.
- b) 3,33.
- c) 3,50.
- d) 6,50.
- e) 7,50.

28. Cinco máquinas de costura são utilizadas em uma confecção de calças. O proprietário deseja comprar mais uma dessas máquinas, idêntica a uma das já existentes, devendo escolher a que tiver a maior média de produção por hora. Na tabela estão indicadas as quantidades de horas trabalhadas e de calças confeccionadas por cada uma das máquinas em determinados períodos observados.



Máquina	Horas	Número de calças confeccionadas
1	240	960
2	210	1.050
3	170	1.020
4	160	480
5	160	800

A máquina a ser comprada deverá ser idêntica à

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

29. Segundo o Compromisso Empresarial para Reciclagem (Cempre), o volume de lixo urbano reciclado passou de 5 milhões de toneladas, em 2003, para 7,1 milhões de toneladas, em 2008. Nesse mesmo período, o número de municípios com coleta seletiva passou de 653 para 1.004. Esperava-se, durante este período, um aumento de pelo menos 40% no volume de lixo urbano reciclado e de 60% no número de municípios com coleta seletiva.

Disponível em: <http://revistaepoca.globo.com>. Acesso em: 31 jul. 2012.

Considerando os valores apresentados para o período de 2003 a 2008, os aumentos esperados no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva

- a) não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 30%.
- b) não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.
- c) foram atingidos apenas parcialmente, pois os aumentos no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva foram de 42%.
- d) foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.
- e) foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 54%.

30. No início de janeiro de um determinado ano, uma família decidiu economizar para as férias de julho daquele ano, guardando uma quantia por mês. Eles decidiram que, em janeiro, guardariam R\$ 300,00 e, a partir de fevereiro, guardariam, a cada mês, 20% a mais do que no mês anterior.

Qual foi o total economizado (em real) no primeiro semestre do ano, abandonando, por arredondamento, possíveis casas decimais nesse resultado?

- a) 1.800,00
- b) 2.100,00
- c) 2.160,00
- d) 2.978,00
- e) 3.874,00

31. O técnico de um time de voleibol registra o número de jogadas e de acertos, por atleta, em cada fundamento, para verificar os desempenhos dos jogadores. Para que o time tenha um melhor aproveitamento no fundamento bloqueio, ele decide substituir um dos jogadores em quadra por um dos que estão no banco de reservas. O critério a ser adotado é o de escolher o atleta que, no fundamento bloqueio, tenha apresentado o maior número de acertos em relação ao número de jogadas de que tenha participado. Os registros dos cinco atletas que se encontram no banco de reservas, nesse

fundamento, estão apresentados no quadro.

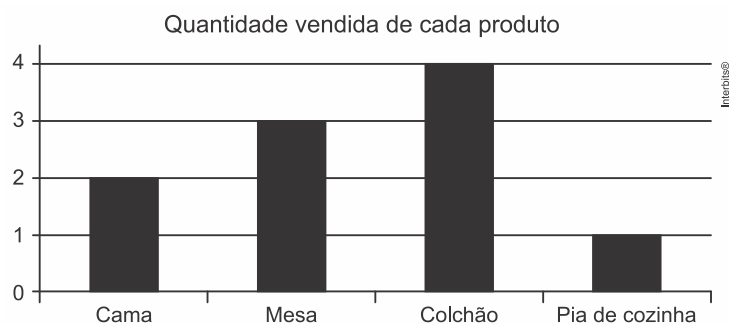
Atleta	Participação em bloqueios	
	Número de acertos	Número de jogadas
I	20	30
II	10	34
III	19	32
IV	3	4
V	8	10

Qual dos atletas do banco de reservas o treinador deve colocar em quadra?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

32. Para atrair uma maior clientela, uma loja de móveis fez uma promoção oferecendo um desconto de 20% em alguns de seus produtos.

No gráfico, estão relacionadas as quantidades vendidas de cada um dos produtos, em um dia de promoção.



No quadro constam os preços de cada produto vendido já com o desconto de 20% oferecido pela loja.

Móvel	Preço (R\$)
Cama	450,00
Mesa	300,00
Colchão	350,00
Pia de cozinha	400,00

Qual foi o valor total de desconto, em reais, concedido pela loja com a venda desses produtos durante esse dia de promoção?

- a) 300,00
- b) 375,00
- c) 720,00
- d) 900,00
- e) 1.125,00

33. Em um torneio interclasses de um colégio, visando estimular o aumento do número de gols nos jogos de futebol, a comissão organizadora estabeleceu a seguinte forma de contagem de pontos para cada partida: uma vitória vale três pontos, um empate com gols vale dois pontos, um empate sem gols vale um ponto e uma derrota vale zero ponto. Após 12 jogos, um dos times obteve como resultados cinco vitórias e sete empates, dos quais, três sem gols.

De acordo com esses dados, qual foi o número total de pontos obtidos pelo time citado?

- a) 22
- b) 25
- c) 26
- d) 29
- e) 36

34. Uma professora de matemática organizou uma atividade associando um ábaco a três dados de diferentes formatos: um cubo com faces numeradas de 1 a 6, associadas à haste C, um octaedro com faces numeradas de 1 a 8, associadas à haste D, e um dodecaedro com faces numeradas de 1 a 12, associadas à haste U. Inicialmente, as hastes do ábaco encontram-se vazias. As letras C, D e U estão associadas a centenas, dezenas e unidades, respectivamente. A haste UM representa unidades de milhar.

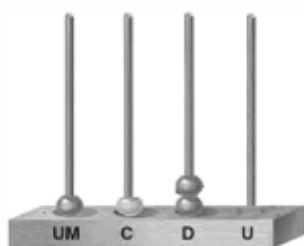
Regras do jogo: são jogados os três dados juntos e, a cada jogada, colocam-se bolinhas nas hastes, correspondendo às quantidades apresentadas nas faces voltadas para cima de cada dado, respeitando a condição “nunca dez”, ou seja, em cada haste podem ficar, no máximo, nove bolinhas. Assim, toda vez que a quantidade de bolinhas em alguma haste for superior a nove, dez delas são retiradas dessa haste e uma bolinha é colocada na haste imediatamente à esquerda. Bolinhas, em quantidades iguais aos números obtidos na face superior dos dados, na segunda jogada, são acrescentadas às hastes correspondentes, que contêm o resultado da primeira jogada.

Iniciada a atividade, um aluno jogou os dados duas vezes. Na primeira vez, as quantidades das faces voltadas para cima foram colocadas nas hastes. Nesta jogada, no cubo, no octaedro e no dodecaedro, as faces voltadas para cima foram, respectivamente, 6, 8 e 11 (Figura 1).

Na segunda vez, o aluno jogou os dados e adicionou as quantidades correspondentes, nas respectivas hastes. O resultado está representado no ábaco da Figura 2.



Figura 1



Ábaco

Figura 2

De acordo com a descrição, as faces voltadas para cima no cubo, no octaedro e no dodecaedro, na segunda jogada, foram, respectivamente,

- a) 4, 2 e 9.
- b) 4, 3 e 9.
- c) 4, 3 e 10.

- d) 5, 3 e 10.  
e) 5, 4 e 9.

35. O prédio de uma empresa tem cinco andares e, em cada andar, há dois banheiros masculinos e dois femininos. Em cada banheiro estão instalados dois recipientes para sabonete líquido com uma capacidade de 200 mL (0,2 litro) cada um. Os recipientes dos banheiros masculinos são abastecidos duas vezes por semana e os dos banheiros femininos, três vezes por semana, quando estão completamente vazios. O fornecedor de sabonete líquido para a empresa oferece cinco tipos de embalagens: I, II, III, IV e V, com capacidades de 2 L, 3 L, 4 L, 5 L e 6 L, respectivamente. Para abastecer completamente os recipientes de sabonete líquido dos banheiros durante a semana, a empresa planeja adquirir quatro embalagens de um mesmo tipo, de forma que não haja sobras de sabonete.

Que tipo de embalagem a empresa deve adquirir?

- a) I  
b) II  
c) III  
d) IV  
e) V

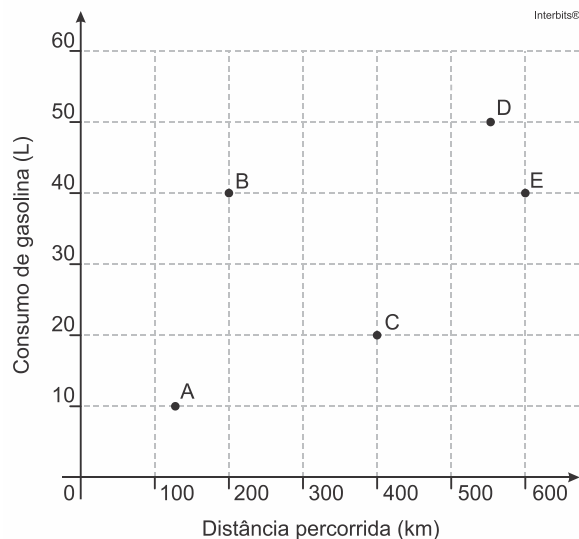
36. Uma partida de vôleibol entre Brasil e Itália foi decidida em cinco sets. As pontuações do jogo estão descritas na tabela.

	<b>1º set</b>	<b>2º set</b>	<b>3º set</b>	<b>4º set</b>	<b>5º set</b>
Brasil	25	25	24	25	18
Itália	16	20	26	27	16

Nessa partida, a mediana dos pontos obtidos por set pelo time da Itália foi igual a

- a) 16.  
b) 20.  
c) 21.  
d) 23.  
e) 26.

37. A economia no consumo de combustível é um fator importante para a escolha de um carro. É considerado mais econômico o carro que percorre a maior distância por litro de combustível. O gráfico apresenta a distância (km) e o respectivo consumo de gasolina (L) de cinco modelos de carros.



O carro mais econômico em relação ao consumo de combustível é o modelo

- a) A.
- b) B.
- c) C.
- d) D.
- e) E.

38. O quadro apresenta dados sobre viagens distintas, realizadas com o mesmo veículo, por diferentes motoristas. Em cada viagem, o veículo foi abastecido com combustível de um preço diferente e trafegou com uma velocidade média distinta.

Motorista	Custo por litro de combustível (R\$)	Distância percorrida (km)	Velocidade média (km/h)
1	2,80	400	84
2	2,89	432	77
3	2,65	410	86
4	2,75	415	74
5	2,90	405	72

Sabe-se que esse veículo tem um rendimento de 15 km por litro de combustível se trafegar com velocidade média abaixo de 75 km/h. Já se trafegar com velocidade média entre 75 km/h e 80 km/h, o rendimento será de 16 km por litro de combustível. Trafegando com velocidade média entre 81 km/h e 85 km/h, o rendimento será de 12 km por litro de combustível e, acima dessa velocidade média, o rendimento cairá para 10 km por litro de combustível.

O motorista que realizou a viagem que teve o menor custo com combustível foi o de número

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

39. O governo de um estado irá priorizar investimentos financeiros, na área de saúde, em uma das cinco cidades apresentadas na tabela.

Cidade	Número total de habitantes	Número total de médicos
M	136.000	340
X	418.000	2.650
Y	210.000	930
Z	530.000	1.983
W	108.000	300
Total	1.402.000	6.203

A cidade a ser contemplada será aquela que apresentar a maior razão entre número de habitantes e quantidade de médicos.

Qual dessas cidades deverá ser contemplada?

- a) M
- b) X
- c) Y
- d) Z
- e) W

40. Em alguns supermercados, é comum a venda de produtos em atacado com preços inferiores aos habituais. Um desses supermercados anunciou a venda de sabonetes em cinco opções de pacotes diferentes. Segue a descrição desses pacotes com as respectivas quantidades e preços.

Pacote I: 3 unidades por R\$ 2,10;

Pacote II: 4 unidades por R\$ 2,60;

Pacote III: 5 unidades por R\$ 3,00;

Pacote IV: 6 unidades por R\$ 3,90;

Pacote V: 12 unidades por R\$ 9,60;

Todos os sabonetes que compõem esses pacotes são idênticos.

Qual desses pacotes oferece o menor preço por sabonete?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

41. Uma empresa pretende adquirir uma nova impressora com o objetivo de suprir um dos seus departamentos que tem uma demanda grande por cópias. Para isso, efetuou-se uma pesquisa de mercado que resultou em três modelos de impressora distintos, que se diferenciam apenas pelas seguintes características:

Características	Impressora A	Impressora B	Impressora C
Custo da máquina (sem cartucho)	R\$ 500,00	R\$ 1.100,00	R\$ 2.000,00
Custo do cartucho	R\$ 80,00	R\$ 140,00	R\$ 250,00
Cópias por cartucho	1.000	2.000	5.000

Para facilitar a tomada de decisão, o departamento informou que sua demanda será de, exatamente, 50.000 cópias.

Assim, deve-se adquirir a impressora

- a) A ou B, em vez de C.
- b) B, em vez de A ou C.

- c) A, em vez de B ou C.
- d) C, em vez de A ou B.
- e) A ou C, em vez de B.

42. Um produtor de café contratou uma empresa de consultoria para avaliar as produções de suas diversas fazendas. No relatório entregue consta que a variância das produtividades das fazendas foi igual a  $9.216 \text{ kg}^2/\text{ha}^2$ . Esse produtor precisa apresentar essa informação, mas em outra unidade de produtividade: *sacas/ha*. Ele sabe que a saca de café tem  $60 \text{ kg}$ , mas tem dúvidas em determinar o valor da variância em  $\text{sacas}^2/\text{ha}^2$ .

A variância das produtividades das fazendas de café expressa em  $\text{sacas}^2/\text{ha}^2$  é

- a) 153,60.
- b) 12,39.
- c) 6,55.
- d) 2,56.
- e) 1,60.

43. O ato de medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie. Para medir comprimentos existem diversos sistemas de medidas. O pé, a polegada e a jarda, por exemplo, são unidades de comprimento utilizadas no Reino Unido e nos Estados Unidos. Um pé corresponde a  $\frac{1.200}{3.937}$  metros ou doze polegadas, e três pés são uma jarda.

Uma haste com 3 jardas, 2 pés e 6 polegadas tem comprimento, em metro, mais próximo de

- a) 1,0.
- b) 3,5.
- c) 10,0.
- d) 22,9.
- e) 25,3.

44. Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de *bits*, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 *bits* em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas  $2^8$  informações distintas.

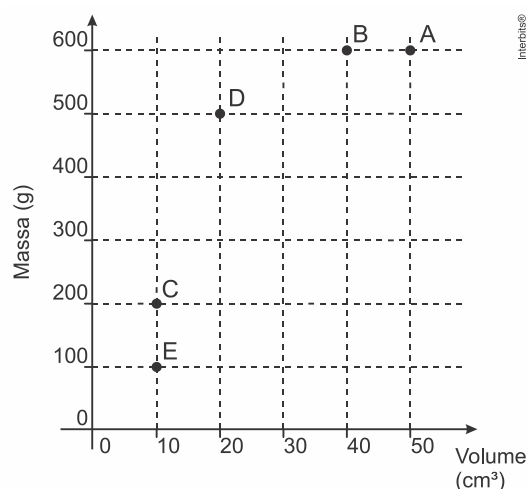
Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2.560 informações distintas, o número de bits em um byte deve passar de 8 para

- a) 10.
- b) 12.
- c) 13.
- d) 18.
- e) 20.

45. Possivelmente você já tenha escutado a pergunta: "O que pesa mais,  $1 \text{ kg}$  de algodão ou  $1 \text{ kg}$  de chumbo?". É óbvio que ambos têm a mesma massa, portanto, o mesmo peso. O truque dessa pergunta é a grande diferença de volumes que faz, enganosamente, algumas pessoas pensarem que pesa mais quem tem maior volume, levando-as a responderem que é o algodão. A grande diferença de volumes decorre da diferença de densidade ( $\rho$ ) dos materiais, ou seja, a razão entre suas massas e seus

respectivos volumes, que pode ser representada pela expressão:  $\rho = \frac{m}{V}$

Considere as substâncias A, B, C, D e E representadas no sistema cartesiano (volume  $\times$  massa) a seguir:



A substância com maior densidade é

- A.
- B.
- C.
- D.
- E.

**Gabarito comentado:**

**Resposta da questão 1:**

[E]

Analisando as alternativas uma a uma:

[A] A concentração de álcool em g/L atinge o patamar de 0,6 mais de 4 h depois do jantar.

[B] A concentração de álcool em g/L atinge o patamar permitido 4 h depois do jantar.

[C] A concentração de álcool em g/L atinge o patamar permitido 5 h depois do jantar.

[D] A concentração de álcool em g/L atinge o patamar permitido 3 h depois do jantar, porém volta a se elevar depois.

[E] A concentração de álcool em g/L atinge o patamar permitido 3 h depois do jantar. Esta é a alternativa correta.

**Resposta da questão 2:**

[A]

O carro parte do instante inicial (zero), acelera por um período, mantém a aceleração constante (reta paralela ao eixo  $x$ ), desacelera e para (reta sobre o eixo  $x$ ), reiniciando o ciclo. Isso se repete duas vezes no período de 15 minutos, indicando que o carro parou em dois semáforos.

**Resposta da questão 3:**

[D]

O maior crescimento anual absoluto observado nessa série corresponde à porção do gráfico crescente e de maior angulação – ou seja, entre 2000 e 2001. Assim, o maior crescimento anual absoluto será igual a:

$$47943 - 45360 = 2583$$



E se esse número se repetisse de 2009 para 2010, o número de homicídios ao final desse período seria igual a:

$$51434 + 2583 = 54017$$

**Resposta da questão 4:**

[E]

Calculando:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 2 \\ A_2 = 4 \\ A_3 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PG com } q = 2$$

$$A_8 = A_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 2^7 = 256$$

**Resposta da questão 5:**

[C]

$$\left. \begin{array}{l} V_i = v \cdot \ell^2 = v \cdot 2^2 \Rightarrow V_i = 4v \\ V_f = 400 = v \cdot (2\ell)^2 \Rightarrow 400 = 16v \Rightarrow v = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow V_i = 4 \cdot 25 = 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Resposta da questão 6:**

[C]

Calculando cada uma das probabilidades:

$$P(C_1) = \frac{7800}{180000} \cong 0,0433 \cong 4,33\%$$

$$P(C_2) = \frac{7500}{100000} = 0,075 = 7,5\%$$

$$P(C_3) = \frac{9000}{110000} \cong 0,08181 \cong 8,2\%$$

$$P(C_4) = \frac{6500}{165000} \cong 0,03939 \cong 3,9\%$$

$$P(C_5) = \frac{11000}{175000} \cong 0,06285 \cong 6,3\%$$

Logo, a cidade que receberá a maior verba será a de número III (maior probabilidade).

**Resposta da questão 7:**

[D]

Calculando:

R vencedor  $\Rightarrow$  Possibilidades :

$$\text{R ganhar / S empatar} \Rightarrow 0,8 \cdot 0,2 = 0,16 = 16\%$$

$$\text{R ganhar / S perder} \Rightarrow 0,8 \cdot (1 - 0,4 - 0,2) = 0,32 = 32\%$$

$$\text{R empatar / S perder} \Rightarrow 0,15 \cdot (1 - 0,4 - 0,2) = 0,06 = 6\%$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow 54\%$$

**Resposta da questão 8:**

[C]

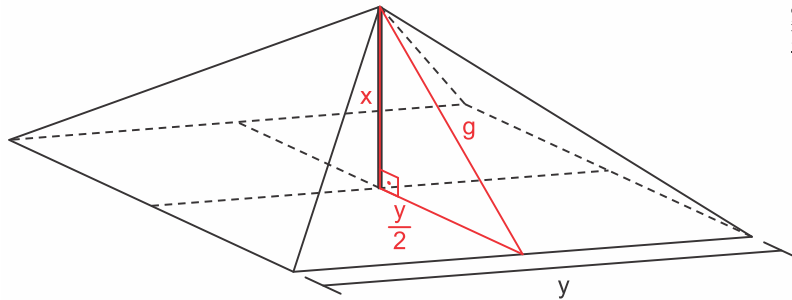
$$\text{Poliedro de faces triangulares} \Rightarrow \frac{3F}{2} = A$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - \frac{3F}{2} + F = 2 \Rightarrow V - \frac{F}{2} = 2 \Rightarrow 2V - F = 4$$

**Resposta da questão 9:**

[A]

Calculando:



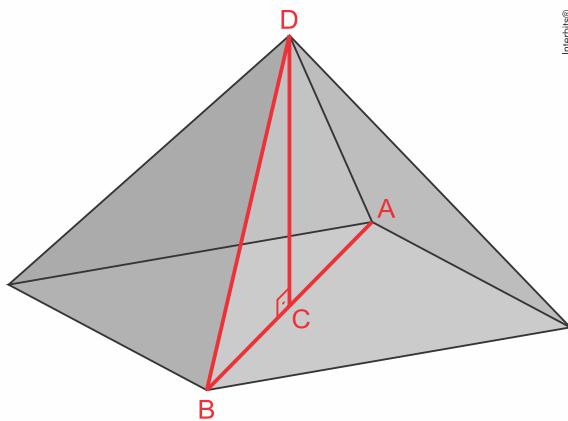
$$g^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$$

$$S_{\text{lateral}} = \frac{4 \cdot (y \cdot g)}{2} \Rightarrow S_{\text{lateral}} = 2y \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}\right)$$

**Resposta da questão 10:**

[B]

Calculando:



$$\overline{AB} = 214\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \frac{214\sqrt{2}}{2} = 107\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = 204$$

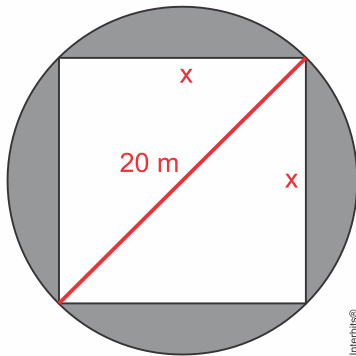
$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow 204^2 = \overline{DC}^2 + (107\sqrt{2})^2$$

$$\overline{DC}^2 = 41616 - 22898 \Rightarrow \overline{DC} = \sqrt{18718} \approx 136,8 \text{ m}$$





Calculando:



$$S_{\text{circunf}} = \pi(10)^2 = 100\pi \approx 300 \text{ m}^2$$

$$x\sqrt{2} = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$S_{\text{quadrado}} = x^2 = (10\sqrt{2})^2 = 200 \text{ m}^2$$

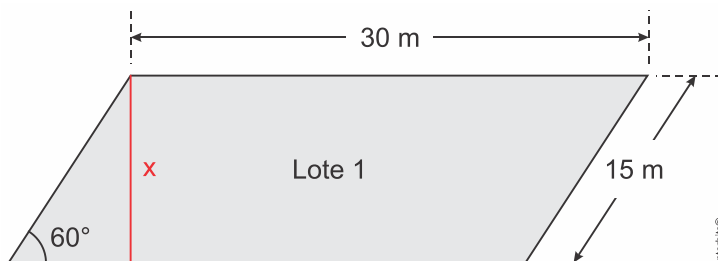
$$S_{\text{terra}} = 300 - 200 = 100 \text{ m}^2$$

Como é necessário 1 saco (de 15 kg) de terra por metro quadrado, serão necessários 100 sacos de terra vegetal para cobrir a área pretendida.

**Resposta da questão 17:**

[C]

Calculando:



$$\frac{15}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow x = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 15 \cdot \frac{1,7}{2} \Rightarrow x \approx 12,75 \text{ m}$$

$$S_{\text{lote1}} = 12,75 \cdot 30 = 382,5 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{lote2}} = 15 \cdot 30 = 450 \text{ m}^2$$

Logo, o lote 2 é o único que tem área suficiente para a execução do projeto.

**Resposta da questão 18:**

[B]

A diagonal IJ cruza liga vértices opostos do hexágono. Como existem apenas 6 vértices, há apenas mais duas diagonais possíveis ligando vértices opostos (portanto tendo o mesmo comprimento) – NQ e MP.

**Resposta da questão 19:**

[C]

Calculando:

pentágono regular  $\Rightarrow z$  é ângulo interno

$$S_{\text{internos}} = 180^\circ \cdot (n - 2) = 180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$$

$$z = \frac{S_{\text{internos}}}{n} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180^\circ \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 108 = 180 \Rightarrow x = y = 36^\circ$$

**Resposta da questão 20:**

[B]

Calculando:

$$S_{\text{central}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{canteiro}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$S_{\text{central}} = S_{\text{canteiro}} \Rightarrow \pi r^2 = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow 2\pi r^2 = \pi R^2 \Rightarrow 2r^2 = R^2 \Rightarrow R = r\sqrt{2}$$

**Resposta da questão 21:**

[D]

Sendo  $R$  o raio das rodas da bicicleta,  $C$  o comprimento da circunferência da roda e  $N$  o número de voltas dadas na distância percorrida, pode-se calcular:

$$R_A = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$C_A = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \Rightarrow C_A = 1,884 \text{ m}$$

$$N_A = \frac{10.000}{1,884} \cong 5307,86 \text{ voltas}$$

$$R_B = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$C_B = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \Rightarrow C_B = 1,256 \text{ m}$$

$$N_B = \frac{5.000}{1,256} \cong 3980,89 \text{ voltas}$$

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{5307,86}{3980,89} \cong 1,33333 \cong \frac{4}{3}$$

**Resposta da questão 22:**

[B]

Calculando:

$$\text{área}_{\text{pizza } 30\text{cm}} = \pi(15)^2 = 225\pi$$

$$\text{área}_{\text{fatia}} = \frac{225\pi}{8} = 28,125\pi$$

$$\text{área}_{10 \text{ fatias}} = 28,125\pi \cdot 10 = 281,25\pi$$

$$281,25\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 281,25 \Rightarrow R \approx 16,50 \text{ cm}$$

**Resposta da questão 23:**

[C]

Calculando:

Jogador	Número de gols em 2010	Número de gols em 2011	Número de gols em 2012	Número de gols em 2013	Média
I	21	21	24	21	21,75
II	20	21	22	22	21,25
III	26	21	20	21	22,00
IV	23	23	19	18	20,75
V	16	21	26	16	19,75

**Resposta da questão 24:**

[B]

Calculando:

$$\text{taxa} = \frac{780000 \text{ m}^3}{300 \text{ dias}} = 2600 \text{ m}^3/\text{dia}$$

**Resposta da questão 25:**

[B]

Calculando:

$$\text{crescimento anual} = \frac{48 - 27}{2011 - 2007} = \frac{21}{4} = 5,25\% \text{ ao ano}$$

$$P_{2013} = 48\% + (5,25\% \cdot (2013 - 2011)) \Rightarrow P_{2013} = 58,5\%$$

**Resposta da questão 26:**

[E]

Calculando:

$$\text{escala} = \frac{5 \text{ cm}}{25 \text{ km}} = \frac{5 \text{ cm}}{2.500.000 \text{ cm}} = \frac{1}{500.000}$$

**Resposta da questão 27:**

[E]

Seendo  $x$  a distância real entre as cidades e  $y$  a distância no novo mapa, pode-se calcular:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ — } 30000 \\ 5 \text{ — } x \end{array} \right\} \Rightarrow x = 150000 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ — } 20000 \\ y \text{ — } 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 7,5 \text{ cm}$$

**Resposta da questão 28:**

[C]

Calculando:

Máquina	Horas	Número de calças confeccionadas	Produção (calças/hora)
1	240	960	$\frac{960}{240} = 4$
2	210	1.050	$\frac{1050}{210} = 5$
3	170	1.020	$\frac{1020}{170} = 6$
4	160	480	$\frac{480}{160} = 3$
5	160	800	$\frac{800}{160} = 5$

**Resposta da questão 29:**

[E]

Se  $x$  igual a porcentagem de lixo urbano reciclado em relação a 2003 e  $y$  igual a porcentagem de municípios atingidos em relação a 2003, pode-se calcular:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ milhões} - 100\% \\ 7,1 \text{ milhões} - x \end{array} \right\} \Rightarrow x = 142\% \Rightarrow \text{aumento de } 42\%$$

$$\left. \begin{array}{l} 653 - 100\% \\ 1004 - y \end{array} \right\} \Rightarrow y = 153,75\% \Rightarrow \text{aumento de } \cong 54\%$$

**Resposta da questão 30:**

[D]

Calculando:

Janeiro  $\Rightarrow 300$

Fevereiro  $\Rightarrow 300 \cdot 1,2 = 360$

Março  $\Rightarrow 360 \cdot 1,2 = 432$

Abril  $\Rightarrow 432 \cdot 1,2 = 518,40$

Maiο  $\Rightarrow 518,40 \cdot 1,2 = 622,08$

Junho  $\Rightarrow 622,08 \cdot 1,2 = 746,496$

$$\Rightarrow 300 + 360 + 432 + 518,4 + 622,08 + 746,496 = 2978,976$$

**Resposta da questão 31:**

[E]

Calculando o percentual de acerto de cada um dos jogadores, tem-se:

I)  $\%_{\text{acertos}} = \frac{20}{30} \cong 0,6667 \cong 66,67\%$  de acerto

II)  $\%_{\text{acertos}} = \frac{10}{34} \cong 0,2941 \cong 29,41\%$  de acerto

III)  $\%_{\text{acertos}} = \frac{19}{32} = 0,59375 = 59,375\%$  de acerto

IV)  $\%_{\text{acertos}} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$  de acerto

V)  $\%_{\text{acertos}} = \frac{8}{10} = 0,8 = 80\%$  de acerto



Logo, o jogador com maior percentual de acertos (o qual deve entrar em quadra) é o jogador V.

**Resposta da questão 32:**

[D]

Calculando:

Móvel	Preço (R\$)	Preço sem desconto	Desconto por peça	Nº peças vendidas	Total de desconto
Cama	450,00	$\frac{450}{1-0,2} = 562,5$	112,5	2	225
Mesa	300,00	$\frac{300}{1-0,2} = 375$	75,0	3	225
Colchão	350,00	$\frac{350}{1-0,2} = 437,5$	87,5	4	350
Pia de cozinha	400,00	$\frac{400}{1-0,2} = 500$	100,0	1	100
Total					<b>900,00</b>

**Resposta da questão 33:**

[C]

Calculando:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ vitórias} \cdot 3 \text{ pontos} = 15 \\ 4 \text{ empates com gols} \cdot 2 \text{ pontos} = 8 \\ 3 \text{ empates sem gols} \cdot 1 \text{ ponto} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 26 \text{ pontos}$$

**Resposta da questão 34:**

[A]

Calculando:

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ jogada} \Rightarrow 6, 8, 11 \\ \text{Unidade} = 11 - 10 = 1 \\ \text{Dezena} = 8 + 1 = 9 \\ \text{Centena} = 6 \\ \text{Milhar} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 691$$

2ª jogada  $\Rightarrow x, y, z$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Unidade} = 1 + z = 10 \Rightarrow z = 9 \Rightarrow 10 - 10 = 0 \\ \text{Dezena} = 9 + 1 + y = 12 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 12 - 10 = 2 \\ \text{Centena} = 6 + 1 + x = 11 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 11 - 10 = 1 \\ \text{Milhar} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x, y, z = 4, 2, 9$$

**Resposta da questão 35:**

[D]

Calculando:

1) Banheiros femininos

$$5 \text{ andares} \cdot 2 \text{ banheiros} = 10 \text{ banheiros}$$

$$10 \text{ banheiros} \cdot 2 \text{ recipientes} = 20 \text{ recipientes}$$

$$20 \text{ recipientes} \cdot 3 \text{ abastecimentos} = 60 \text{ abastecimentos}$$

$$60 \text{ abastecimentos} \cdot 0,2 \text{ litro/abastecimento} = 12 \text{ litros}$$

2) Banheiros masculinos

$$5 \text{ andares} \cdot 2 \text{ banheiros} = 10 \text{ banheiros}$$

$$10 \text{ banheiros} \cdot 2 \text{ recipientes} = 20 \text{ recipientes}$$

$$20 \text{ recipientes} \cdot 2 \text{ abastecimentos} = 40 \text{ abastecimentos}$$

$$40 \text{ abastecimentos} \cdot 0,2 \text{ litro / abastecimento} = 8 \text{ litros}$$

Total = 12 + 8 = 20 litros ou 4 embalagens de 5 litros cada

**Resposta da questão 36:**

[B]

A mediana é o valor que divide um conjunto de valores ordenados em partes iguais. Assim, ordenando os pontos da Itália, tem-se que a mediana é igual a 20.

$$16 \quad 16 \quad 20 \quad 26 \quad 27 \Rightarrow \text{mediana} = 20$$

**Resposta da questão 37:**

[C]

Calculando:

$$\text{Carro A} \Rightarrow \frac{100}{10} = 10 \text{ km/litro}$$

$$\text{Carro B} \Rightarrow \frac{200}{40} = 5 \text{ km/litro}$$

$$\text{Carro C} \Rightarrow \frac{400}{20} = 20 \text{ km/litro}$$

$$\text{Carro D} \Rightarrow \frac{550}{50} = 11 \text{ km/litro}$$

$$\text{Carro E} \Rightarrow \frac{600}{40} = 15 \text{ km/litro}$$

**Resposta da questão 38:**

[D]

Sendo  $Q$  a quantidade de litros utilizada por cada motorista em cada viagem e  $C$  o custo total de cada viagem, pode-se calcular:

Motorista	Custo por litro de combustível (R\$)	Distância percorrida (km)	Velocidade média (km/h)	Rendimento (km/litro)
1	2,80	400	84	12
2	2,89	432	77	16
3	2,65	410	86	10
4	2,75	415	74	15
5	2,90	405	72	15

$$\text{motorista 1} \Rightarrow Q_1 = \frac{400}{12} \cong 33,33 \text{ litros} \Rightarrow C_1 = 2,80 \cdot 33,33 = 93,33 \text{ reais}$$

$$\text{motorista 2} \Rightarrow Q_2 = \frac{432}{16} = 27 \text{ litros} \Rightarrow C_2 = 2,89 \cdot 27 = 78,03 \text{ reais}$$

$$\text{motorista 3} \Rightarrow Q_3 = \frac{410}{10} = 41 \text{ litros} \Rightarrow C_3 = 2,65 \cdot 41 = 108,65 \text{ reais}$$

$$\text{motorista 4} \Rightarrow Q_4 = \frac{415}{15} \cong 27,67 \text{ litros} \Rightarrow C_4 = 2,75 \cdot 27,67 = 76,08 \text{ reais}$$

$$\text{motorista 5} \Rightarrow Q_5 = \frac{405}{15} = 27 \text{ litros} \Rightarrow C_5 = 2,90 \cdot 27 = 78,30 \text{ reais}$$

Assim, o motorista que obteve a viagem com menor custo foi o motorista 4.

**Resposta da questão 39:**

[A]

Calculando:

Cidade	Número total de habitantes	Número total de médicos	Razão hab/médico
M	136.000	340	$\frac{136000}{340} = 400$
X	418.000	2.650	$\frac{418000}{2650} \approx 157,74$
Y	210.000	930	$\frac{210000}{930} = 225,80$
Z	530.000	1.983	$\frac{530000}{1983} \approx 267,27$
W	108.000	300	$\frac{108000}{300} = 360$
Total	1.402.000	6.203	$\frac{1402000}{6203} \approx 226,02$

**Resposta da questão 40:**

[C]

Calculando:

$$\text{Pacote I} \Rightarrow \frac{2,10}{3} = 0,70$$

$$\text{Pacote II} \Rightarrow \frac{2,60}{4} = 0,65$$

$$\text{Pacote III} \Rightarrow \frac{3,00}{5} = 0,60$$

$$\text{Pacote IV} \Rightarrow \frac{3,90}{6} = 0,65$$

$$\text{Pacote V} \Rightarrow \frac{9,60}{12} = 0,80$$

**Resposta da questão 41:**

[E]

Calculando o custo total para cada uma das impressoras, considerando-se 50.000 cópias:

$$\text{custo cópia A} = \frac{80}{1000} = 0,08 \Rightarrow \text{custo total A} = 500 + 0,08 \cdot 50000 = 4500,00$$

$$\text{custo cópia B} = \frac{140}{2000} = 0,07 \Rightarrow \text{custo total B} = 1100 + 0,07 \cdot 50000 = 4600,00$$

$$\text{custo cópia C} = \frac{80}{1000} = 0,05 \Rightarrow \text{custo total C} = 2000 + 0,05 \cdot 50000 = 4500,00$$

Logo, conclui-se que a empresa pode adquirir a impressora A ou C, descartando a B (maior custo).

**Resposta da questão 42:**

[D]

Calculando:

$$\frac{9.216 \text{ kg}^2/\text{ha}^2}{60 \text{ sacas} \cdot 60 \text{ sacas}} = \frac{9.216 \text{ kg}^2/\text{ha}^2}{3.600 \text{ sacas}^2} = 2,56 \text{ sacas}^2/\text{ha}^2$$

**Resposta da questão 43:**

[B]

Calculando:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ jardas} = 9 \text{ pés} = 9 \cdot \frac{1.200}{3.937} \text{ metros} \\ 2 \text{ pés} = 2 \cdot \frac{1.200}{3.937} \text{ metros} \\ 6 \text{ polegadas} = 0,5 \text{ pé} = 0,5 \cdot \frac{1.200}{3.937} \text{ metros} \end{array} \Rightarrow 11,5 \cdot \frac{1.200}{3.937} = 3,5052 \text{ metros}$$

**Resposta da questão 44:**

[B]

Escrevendo as potências de 2, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{11} = 2048 \\ 2^{12} = 4096 \end{array} \right\} \Rightarrow 2048 < 2560 < 4096$$

Assim, seriam necessários no mínimo 12 bits em um byte.

**Resposta da questão 45:**

[D]

Calculando:

$$\rho_A = \frac{600}{50} = 12 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_B = \frac{600}{40} = 15 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_C = \frac{200}{10} = 20 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_D = \frac{500}{20} = 25 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_E = \frac{100}{10} = 10 \text{ g/cm}^3$$

### Comandos utilizados no maple para construção dos gráficos

Gráfico 8

**> a:=[1,1];b:=[-10,10];**

**u:=[[1,0]];**

$$a := [1, 1]$$

$$b := [-10, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**> T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);**

$$T, \phi, Nit, Nind := [t1], \phi, 2, 1$$

**> plot(phi(t),t=-15..15);**

**> fsolve(D(phi)(t)=0,t=-5);**

-0.1115819276

Gráfico 9

**> u:=[[0,1]];T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);plot(phi(t),t=-15..15);**

$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [tI], \phi, 2, 1$$

Gráfico 10

```
a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=<<1,0,0>>;
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);
```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [tI], \phi, 3, 1$$

Gráfico 11

```
a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=<<0,1,0>>;
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);
```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [tI], \phi, 3, 1$$

Gráfico 12

```
a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=<<0,0,1>>;
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);
```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [t1], \phi, 3, 1$$

Gráfico 13

```
a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=[[1,1,0]>>];
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);
```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [t1], \phi, 3, 1$$

```
fsolve(D(phi)(t)=0,t=5);
```

4.886938969

Gráfico 14

```
a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=[[1,0,1]>>];
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);
```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [t1], \phi, 3, 1$$

Gráfico 15

```

a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=[[0,1,1]];
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);

```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [tI], \phi, 3, 1$$

Gráfico 16

```

a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=[[1,1,1]];
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);

```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [tI], \phi, 3, 1$$

Gráfico 17

```

a:=[1,1,1];b:=[-10,0,10];
u:=[[0,0,0]];
T,phi,Nit,Nind:=phiuab(u,a,b);
plot(phi(t),t=-20..20);

```

$$a := [1, 1, 1]$$

$$b := [-10, 0, 10]$$



$$u := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T, \phi, Nit, Nind := [t1], \phi, 3, 1$$

Gráfico 18

> **c:=.2;**

**a1:=1;a2:=1;a3:=1;a4:=1;a5:=1;**

**b1:=-1;b2:=1;b3:=1.6;b4:=2;b5:=2.6;**

**f1:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a1\*(x-b1)));**

**f2:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a2\*(x-b2)));**

$$c := 0.2$$

$$a1 := 1$$

$$a2 := 1$$

$$a3 := 1$$

$$a4 := 1$$

$$a5 := 1$$

$$b1 := -1$$

$$b2 := 1$$

$$b3 := 1.6$$

$$b4 := 2$$

$$b5 := 2.6$$

$$f1 := x \rightarrow c + \frac{1-c}{1 + e^{-a1(x-b1)}}$$

$$f2 := x \rightarrow c + \frac{1-c}{1 + e^{-a2(x-b2)}}$$

> **f3:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a3\*(x-b3)));**

$$f3 := x \rightarrow c + \frac{1-c}{1 + e^{-a3(x-b3)}}$$

> **f4:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a4\*(x-b4)));**

$$f4 := x \rightarrow c + \frac{1-c}{1 + e^{-a4(x-b4)}}$$

> **f5:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a5\*(x-b5)));**

$$f5 := x \rightarrow c + \frac{1-c}{1 + e^{-a5(x-b5)}}$$

> plot([f1(x),f2(x),f3(x),f4(x),f5(x)],x=-5..5,color=[red,blue,green,black,yellow],axes=boxed);

Gráfico 19

> g:=(t1,t2)-  
>(f1(t1))\*f2(t1))\*f3(t1))\*f4(t1))\*f5(t1))\*f1(t2))\*f2(t2))\*f3(t2))\*f4(t2))\*f5(t2));  

$$g := (t1, t2) \rightarrow f1(t1) f2(t1) f3(t1) f4(t1) f5(t1) f1(t2) f2(t2) f3(t2) f4(t2) f5(t2)$$
  
> plot3d(g(t1,t2),t1=-10..10,t2=-10..10,axes=boxed)

Gráfico 20

> g:=(t1,t2)->(1-f1(t1))\*(1-f2(t1))\*(1-f1(t2))\*(1-f2(t2))\*(1-f3(t1))\*(1-f3(t2))  

$$g := (t1, t2) \rightarrow (1 - f1(t1)) (1 - f2(t1)) (1 - f1(t2)) (1 - f2(t2)) (1 - f3(t1)) (1 - f3(t2))$$
  
> plot3d(g(t1,t2),t1=-10..10,t2=-10..10,axes=boxed)

Gráfico 21

> g:=(t1,t2)->(f1(t1))\*f2(t1))\*f3(t1))\*(1-f4(t1))\*f5(t1))  
 \*(1-f1(t2))\*f2(t2))\*f3(t2))\*f4(t2))\*f5(t2));  

$$g := (t1, t2) \rightarrow f1(t1) f2(t1) f3(t1) (1 - f4(t1)) f5(t1) (1 - f1(t2)) f2(t2) f3(t2) f4(t2) f5(t2)$$

> g:=unapply(f1(t1)\*f2(t1)\*f3(t1)\*(1-f4(t1))\*f5(t1)\*(1-f1(t2))\*f2(t2)\*f3(t2)\*f4(t2)\*f5(t2),[t1,t2]);

$$g := (t1, t2) \rightarrow \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 - 1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 1.6}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 2.6}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t2 - 1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 1.6}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 2.6}}\right)$$

> px:=D[1](g):

py:=D[2](g):

implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=0..5,t2=0..5,color=[blue,red],numpoints=3000);

Gráfico 22

```
> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=2.5,t2=2.5});
           {t1 = 2.664829729, t2 = 2.492551171}
> subs(t1=a,t2=b,%);
           {a = 2.664829729, b = 2.492551171}
> assign(%);
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
> display(ps,grg,axes=boxed);
```

Gráfico 23

```
> g:=unapply(f1(t1)*f2(t1)*f3(t1)*(1-f4(t1))*(1-f5(t1))*f1(t2)*(1-f2(t2))*(1-
f3(t2))*f4(t2)*f5(t2),[t1,t2]);
           g := (t1, t2) → (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t1} - 1}$ ) (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t1} + 1}$ ) (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t1} + 1.6}$ ) (0.8
           -  $\frac{0.8}{1 + e^{-t1} + 2}$ ) (0.8 -  $\frac{0.8}{1 + e^{-t1} + 2.6}$ ) (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t2} - 1}$ ) (0.8
           -  $\frac{0.8}{1 + e^{-t2} + 1}$ ) (0.8 -  $\frac{0.8}{1 + e^{-t2} + 1.6}$ ) (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t2} - 1}$ ) (0.2 +  $\frac{0.8}{1 + e^{-t2} + 2.6}$ )
> grg:=plot3d(g(t1,t2),t1=-5..5,t2=-5..5,axes=boxed):
display(grg,axes=boxed);
```

Gráfico 24

```
> px:=D[1](g):
py:=D[2](g):
> implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=-5..5,t2=-
5..5,color=[blue,red],numpoints=3000);
```

Gráfico 25

```
> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=1.5,t2=1.5});
           {t1 = 1.563236170, t2 = 0.8795448667}
> subs(t1=a,t2=b,%);
           {a = 1.563236170, b = 0.8795448667}
> assign(%);
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
> display(ps,grg,axes=boxed);
```

Gráfico 26

```
> g:=(t1,t2)->(f1(t1))*f2(t1)*(1-f3(t1))*(1-f4(t1))*(1-f5(t1))*f1(t2)*(1-f2(t2))*(1-f3(t2))*(1-f4(t2))*f5(t2);
```

$$g := (t1, t2) \rightarrow f1(t1) f2(t1) (1 - f3(t1)) (1 - f4(t1)) (1 - f5(t1)) f1(t2) (1 - f2(t2)) (1 - f3(t2)) (1 - f4(t2)) f5(t2)$$

```
> g:=unapply(f1(t1)*f2(t1)*(1-f3(t1))*(1-f4(t1))*(1-f5(t1))*f1(t2)*(1-f2(t2))*(1-f3(t2))*(1-f4(t2))*f5(t2),[t1,t2]);
```

$$g := (t1, t2) \rightarrow \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 - 1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 1.6}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 2}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t1 + 2.6}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t2 - 1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 1.6}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-t2 + 2.6}}\right)$$

```
> grg:=plot3d(g(t1,t2),t1=-5..5,t2=-5..5,axes=boxed):
display(grg,axes=boxed);
```

```
> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=1.5,t2=1.5});
```

$$\{t1 = 1.563236170, t2 = 0.8795448667\}$$

```
> subs(t1=a,t2=b,%);
```

$$\{a = 1.563236170, b = 0.8795448667\}$$

```
> assign(%);
```

```
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
```

```
> display(ps,grg,axes=boxed);
```

Gráfico 27

```
> px:=D[1](g):
```

```
py:=D[2](g):
```

```
> implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=-5..5,t2=-5..5,color=[blue,red],numpoints=3000);
```

Gráfico 28

```
> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=0.5,t2=-.5});  
      {t1 = 0.4534930973, t2 = -0.3805515138}  
> subs(t1=a,t2=b,%);  
      {a = 0.4534930973, b = -0.3805515138}  
> assign(%);  
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):  
> display(ps,grg,axes=boxed);
```

Gráfico 29

```
c:=.2;d  
a1:=.1;a2:=.9;a3:=1.2;a4:=1.6;a5:=3;  
b1:=0;b2:=0;b3:=0;b4:=0;b5:=0;  
f1:=x->c+(1-c)*1/(1+exp(-a1*(x-b1)));  
f2:=x->c+(1-c)*1/(1+exp(-a2*(x-b2)));  
      c := 0.2  
      a1 := 0.1  
      a2 := 0.9  
      a3 := 1.2  
      a4 := 1.6  
      a5 := 3  
      b1 := 0  
      b2 := 0  
      b3 := 0  
      b4 := 0  
      b5 := 0  
      f1 := x → c +  $\frac{1 - c}{1 + e^{-a1(x - b1)}}$   
      f2 := x → c +  $\frac{1 - c}{1 + e^{-a2(x - b2)}}$   
> f3:=x->c+(1-c)*1/(1+exp(-a3*(x-b3)));  
      f3 := x → c +  $\frac{1 - c}{1 + e^{-a3(x - b3)}}$ 
```

> **f4:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a4\*(x-b4)));**

$$f4 := x \rightarrow c + \frac{1 - c}{1 + e^{-a4(x - b4)}}$$

> **f5:=x->c+(1-c)\*1/(1+exp(-a5\*(x-b5)));**

$$f5 := x \rightarrow c + \frac{1 - c}{1 + e^{-a5(x - b5)}}$$

> **plot([f1(x),f2(x),f3(x),f4(x),f5(x)],x=-5..5,  
color=[red,blue,green,black,yellow],axes=boxed);**

Gráfico 30

> **g:=(t1,t2)->(f1(t1))\*f2(t1)\*(1-f3(t1))\*(1-f4(t1))\*(1-f5(t1))\*(1-f1(t2))\*(1-f2(t2))\*(1-f3(t2))\*f4(t2)\*f5(t2));**

$$g := (t1, t2) \rightarrow f1(t1) f2(t1) (1 - f3(t1)) (1 - f4(t1)) (1 - f5(t1)) (1 - f1(t2)) (1 - f2(t2)) (1 - f3(t2)) f4(t2) f5(t2)$$

> **grg:=plot3d(g(t1,t2),t1=-5..5,t2=-5..5,axes=boxed):**

> **display(grg,axes=boxed)**

Gráfico 31

> **g:=unapply(f1(t1)\*f2(t1)\*(1-f3(t1))\*(1-f4(t1))\*(1-f5(t1))\*(1-f1(t2))\*(1-f2(t2))\*(1-f3(t2))\*f4(t2)\*f5(t2),[t1,t2]);**

$$g := (t1, t2) \rightarrow \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-3 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t2}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t2}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-3 t2}}\right)$$

> **px:=D[1](g):**

**py:=D[2](g):**

> **implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=-2..2,t2=-2..2,color=[blue,red],numpoints=3000);**

Gráfico 32

> **fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=-1.6,t2=0.2});**

$$\{t1 = -1.449434335, t2 = 0.2111029694\}$$

> **subs(t1=a,t2=b,%);**

$$\{a = -1.449434335, b = 0.2111029694\}$$

```

> assign(%);
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
> display(ps,grg,axes=boxed);

```

Gráfico 33

```

> g:=(t1,t2)->(f1(t1))*f2(t1)*f3(t1)*(1-f4(t1))*(1-f5(t1))*(1-f1(t2))*(1-
f2(t2))*f3(t2)*f4(t2)*f5(t2));

```

$$g := (t1, t2) \rightarrow f1(t1) f2(t1) f3(t1) (1 - f4(t1)) (1 - f5(t1)) (1 - f1(t2)) (1 - f2(t2)) f3(t2) f4(t2) f5(t2)$$

```

>
> grg:=plot3d(g(t1,t2),t1=-5..5,t2=-5..5,axes=boxed):
> display(grg,axes=boxed)

```

Gráfico 34

```

> g:=unapply(f1(t1)*f2(t1)*f3(t1)*(1-f4(t1))*(1-f5(t1))*(1-f1(t2))*(1-
f2(t2))*f3(t2)*f4(t2)*f5(t2),[t1,t2]);

```

$$g := (t1, t2) \rightarrow \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-3 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t2}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-3 t2}}\right)$$

```

> px:=D[1](g):
py:=D[2](g):
> implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=-2..2,t2=-
2..2,color=[blue,red],numpoints=3000);

```

Gráfico 35

```

> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=-0.6,t2=0.8});
{t1 = -0.6235068972, t2 = 0.8419348542}
> subs(t1=a,t2=b,%);
{a = -0.6235068972, b = 0.8419348542}
> assign(%);

```

```
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
> display(ps,grg,axes=boxed);
```

Gráfico 36

```
> g:=(t1,t2)->(f1(t1))*(f2(t1))*(f3(t1))*(f4(t1))*(1-f5(t1))*(1-
f1(t2))*(f2(t2))*(f3(t2))*(f4(t2))*(f5(t2));
      g := (t1, t2) -> f1(t1) f2(t1) f3(t1) f4(t1) (1 - f5(t1)) (1 - f1(t2)) f2(t2) f3(t2) f4(t2) f5(t2)
>
> grg:=plot3d(g(t1,t2),t1=-10..10,t2=-10..10,axes=boxed):
> display(grg,axes=boxed)
```

Gráfico 37

```
> g:=unapply(f1(t1)*f2(t1)*f3(t1)*f4(t1)*(1-f5(t1))*(1-
f1(t2))*f2(t2)*f3(t2)*f4(t2)*f5(t2),[t1,t2]);
      g := (t1, t2) -> \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t1}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-3 t1}}\right) \left(0.8 - \frac{0.8}{1 + e^{-0.1 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-0.9 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.2 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-1.6 t2}}\right) \left(0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{-3 t2}}\right)
```

```
> px:=D[1](g):
py:=D[2](g):
> implicitplot([px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0],t1=-2..2,t2=-
2..2,color=[blue,red],numpoints=3000);
```

```
> fsolve({px(t1,t2)=0,py(t1,t2)=0},{t1=-0.6,t2=0.8});
      {t1 = -0.08497091530, t2 = 3.317341369}
```

```
> subs(t1=a,t2=b,%);
      {a = -0.08497091530, b = 3.317341369}
```

```
> assign(%);
> ps:=pointplot3d([a,b,g(a,b)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=red):
> display(ps,grg,axes=boxed);
```



