Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Ricardo José da Costa Rubim

Uma proposta para o ensino de inequações polinomiais

Rio de Janeiro
2016

Ricardo José da Costa Rubim

Uma proposta para o ensino de inequações polinomiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Fábio Xavier Penna

Doutor em Matemática - IMPA

Rio de Janeiro

2016

Rubim, Ricardo

Uma proposta para o ensino de inequações polinomiais / Ricardo Rubim - 2016

50.p

1.Matemática 2. Álgebra. I.Título.

CDU 536.21

Ricardo José da Costa Rubim

Uma proposta para o ensino de inequações polinomiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 16 de maio de 2016

BANCA EXAMINADORA

Fábio Xavier Penna

Doutor em Matemática - IMPA

Silas Fantin

Doutor em Matemática - USP

Francisco Roberto Pinto Mattos

Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação - UFRJ

Resumo

Nesta monografia de conclusão de curso do programa de Pós-Graduação em matemática PROFMAT da UNIRIO, é feita uma sinopse de como funciona, em nossas escolas de ensino médio, o ensino de inequações-produto e inequações-quociente, bem como de alguns conteúdos que antecedem e são pré-requisitos do mesmo, cujo objetivo principal é propor um método diferente (mais rápido e com conclusões mais profundas que poderão servir de alicerces para conteúdos posteriores, como o cálculo, por exemplo), para resolução de inequações, principalmente inequações-produto e inequações-quociente. Também será abordada nessa dissertação toda fundamentação teórica necessária para respaldar o método de resolução para as inequações mencionadas aqui.

Esse trabalho, tem como público alvo o professor que atua no ensino médio da educação básica. Por isso, no final dessa dissertação será apresentado, como sugestão, um passo a passo para aplicação desse conteúdo.

Palavras-chaves: inequações, estudo de sinal, ensino.

Abstract

In this monograph on the conclusion of the course of the Master Program in mathematics PROFMAT of UNIRIO, it is made a synopsis of how, in our secondary schools, the teaching of product inequalities and inequalities-quotient, as well as some precede and prerequisites of the same, whose main objective is to propose a different method (faster and with deeper conclusions that can be the basis for later contents, such as calculation, for example), to solve inequalities, product and quotient inequalities. Also discussed in this dissertation is any theoretical basis necessary to support the method of resolution for the inequalities mentioned here.

This work is aimed at the teacher who works in the middle school of basic education. Therefore, at the end of this dissertation will be presented, as a suggestion, a step by step to apply this content.

Keywords: inequalities, study of signal, learning.

Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus por permitir que meus caminhos tenham me levado até aqui, pela vida que tenho, pelos meus amigos e pelo filho maravilhoso.

Aos meus pais, Ricardo da Costa Rubim e Ruth Malafaia Peixoto, que com muita dificuldade sempre priorizaram buscar o melhor pra mim e minha irmã, em especial meu pai que sempre acreditou que estudar era a única forma de buscar ascenção e satisfação pessoal.

Ao meu grande amigo e pai profissional Claudir Hart.

Ao meu orientador Fábio Xavier Penna, por acreditar na minha proposta, pela dedicação e pela espetacular orientação.

Aos professores do PROFMAT-UNIRIO, pelos conhecimentos passados, em especial aos professores Silas Fantin e Fabio Simas, pelo apoio em momentos difíceis.

Aos meus amigos Miguel Angelo do Nascimento Brandão, Walcher Oliveira Machado e Sérgio Murilo da Cruz Costa, por sempre estarem ao meu lado.

Aos amigos e professores Mary Anne Marques da Silva, Roberto da Silva Côrrea, Fernando Vitorino, André Diniz, Fernando Teixeira da Silva Filho e Marcelo Japiassu Ramos.

Ao meu filho que sempre está com um sorriso me encorajando a prosseguir.

À minha irmã Rosana Valéria da Costa Rubim, por todos os conselhos e preocupação.

Aos meus companheiro de PROFMAT, pelo apoio nos momentos difíceis.

À Michele Rafaela Borborema pela compreensão da importância desse trabalho para mim, e consequentemente pela ajuda.

Por fim, a todos que estão torcendo por mim, neste momento anônimos, muito obrigado.

Sumário

1 Introdução

Como o atual método utilizado em nossas escolas para resolução de inequações polinomiais, principalmente inequações-produto e inequações-quociente, demanda de tempo, de espaço para resolução e de muita repetição puramente mecânica. Digo repetição puramente mecânica, pois são feitos os estudos de sinais de cada função que compõem o produto e/ou quociente, para que depois tais conclusões sejam compiladas no quadro de sinais, onde se faz, dependendo do tamanho da inequação, grandes comparações de produtos com os sinais encontrados em cada intervalo, podendo inclusive, por uma simples distração do aluno, levar a resultados totalmente adversos da resolução correta.

Venho aqui propor a professores do ensino médio, um outro método de resolução de inequações polinomiais, com ênfase nas inequações-produto e inequações-quociente, que além de demandar menos tempo e espaço para resolução, dá maior importância a conceitos como multiplicidade de uma raiz, o método hoje utilizado em nossas escolas trabalha com raízes de multiplicidade máxima igual a 2 e quando uma inequação possui uma raiz tripla, por exemplo, isso passa despercebido. O que venho aqui propor, também menciona o fato de que quando x é demasiadamente grande a função assume o sinal do coeficiente líder do polinômio, esse conhecimento familiarizaria, por exemplo, a compreensão do limite de x, quando x tende ao infinito, em funções polinomiais, além de que o aluno poderá perceber que a conjuntura que vinha fazendo até então, faz todo sentido. Tal procedimento também traz conclusões até então não mencionadas como: que a paridade da multiplicidade de uma raiz real interfere diretamente no resultado da inequação, e que todo zero real da função é responsável pela mudança de sinal da função.

Ou seja, o método aqui proposto é mais rápido, demanda menos espaço para resolução e ainda assim é mais completo. Porém exige por parte do professor uma abordagem mais completa, caso contrário fica parecendo mais um macete.

Os pré-requisitos para a utilização do que nessa dissertação proponho, são os mesmos necessários para a utilização do método vigente nos livros didáticos: função constante, função afim, função quadrática (no caso da função quadrática, faço alguns comentários sobre como o assunto é tratado nos livros didáticos) e aritmética básica, como potência, por exemplo.

2 O ensino de inequações nas escolas e sua abordagem nos livros didáticos

2.1 Aspectos comuns da abordagem nos livros didáticos

Realizei uma pesquisa com vários livros didáticos do ensino médio e verifiquei que função quadrática, que é parte do assunto que fundamenta a resolução de inequações-produto e inequações-quociente, é tratado da forma: "observe o exemplo", ou seja, não se faz fundamentação teórica.

Os livros didáticos citados acima foram:

- Matemática Temas e Metas volume 1, de Antonio dos Santos Machado, Editora Atual, segunda edição.
- Matemática Ensino Médio, volume 1, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, terceira edição.
- Matemática uma nova abordagem, volume 1 (versão trigonometria), de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, Editora FTD, 2009
- Fundamentos de Matemática Elementar volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, Editora Atual, terceira edição.
- Matemática contexto & aplicações volume 1, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, terceira edição.
- Matemática volume único, de José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr, Editora FTD, terceira edição.

Geralmente a abordagem é feita do seguinte modo: apresenta-se situações problemas que recaem numa função de grau 2, ou até mesmo simplesmente se apresenta tal função, nos dois casos na forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, exceto o livro: "Matemática - Ensino Médio", de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora Saraiva, que começa explicando o que é uma parábola. A seguir é construída uma tabela de duas colunas, onde na primeira coluna ficam as abscissas aparentemente atribuídas ao acaso, apenas depois se comenta que é importante colocar a abscissa do vértice nesses valores escolhidos, e na segunda coluna as ordenadas encontradas quando a variável é substituída pelas abscissas escolhidas para compor a primeira coluna.

Todos os livros consultados demonstram como se calculam as coordenadas do vértice; todos tratam do(s) zero(s) da função, da relação entre o discriminante e o número e tipo de raízes, da relação entre o coeficiente da variável de grau 2 na concavidade da parábola (mas apenas o livro mencionado no parágrafo anterior demonstra porque essa relação existe).

Todos fazem o estudo de sinal da função quadrática, e tratam da resolução de inequações polinomiais de grau 1 e de grau 2, estudando os sinais das mesmas, mas apenas, mais uma vez, o livro didático mencionado no parágrafo acima descreve o que é uma parábola, fala em foco, diretriz e eixo de simetria. Os outros tratam como se os alunos já tivessem estudado parábola, ou simplesmente comunicam que o assunto será visto mais tarde em geometria analítica, como se o tema parábola só fosse tratado em geometria analítica.

A forma canônica de uma função quadrática só foi abordada apenas por um dos livros consultados ("Fundamentos de Matemática Elementar", volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, editora Atual).

No caso das inequações-produto e inequações-quociente, todos fatoram as expressões em produtos de polinômios que serão estudados de forma independente, para que depois se faça o produto dos sinais encontrados em cada polinômio, nos intervalos determinados pelas raízes reais da expressão.

Todos os livros didáticos pesquisados tratam do assunto inequações-produto e inequações-quociente dentro do capítulo que trata de função afim e depois alguns voltam a tocar no assunto dentro do capítulo de função quadrática, outros simplesmente adicionam questões que envolvem inequações-produto e inequações-quociente aos exercícios de inequações de grau 2.

Todos os livros didáticos pesquisados tratam primeiro das inequações-produto e depois utiliza o método de resolução dessas inequações para tratar das inequações-quociente. A grande maioria dos livros didáticos aborda primeiro inequações-produto de dois fatores ($f \cdot g > 0, f \cdot g < 0, f \cdot g \geq 0$ e $f \cdot g \leq 0$), para depois estender o raciocínio para inequações-produto com mais de dois fatores. Geralmente os livros didáticos descrevem a resolução de inequações-produto do seguinte modo:

- devemos primeiro fatorar os polinômios e depois estudar os sinais de cada um deles.
- em seguida devemos fazer um quadro de sinais com os sinais estudados no item anterior e realizar o produto entre esses sinais.
- depois devemos perceber que existem quatro possibilidades:
$f \cdot g > 0, f \cdot g < 0, f \cdot g \geq 0$ e $f \cdot g \leq 0$.
no primeiro caso devemos ter ($f > 0$ e $g > 0$) ou ($f < 0$ e $g < 0$)
no segundo caso ($f < 0$ e $g > 0$) ou ($f > 0$ e $g < 0$),
no terceiro caso ($f \geq 0$ e $g \geq 0$) ou ($f \leq 0$ e $g \leq 0$),
e finalmente no quarto caso ($f \geq 0$ e $g \leq 0$) ou ($f \leq 0$ e $g \geq 0$).
- "observe o exemplo" ...

- Obs. Após os primeiros exemplos, são feitos exemplos com mais de dois fatores.
- Obs. No caso de inequações-quociente se procede da mesma forma, atentando-se para o fato de que o denominador nunca poderá ser nulo.

Dos livros consultados apenas os dois livros mencionados acima ("Fundamentos de Matemática Elementar", volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, editora Atual e "Matemática - Ensino Médio", de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora Saraiva) demonstram a resolução de uma inequação-produto antes da utilização do aparato, chamado por todos de "quadro de sinais", os demais livros didáticos praticamente mostram o aparato baseando-se na expressão "observe o exemplo".

2.2 Arbodagens teóricas encontradas

Dos livros didáticos analisados, o livro "Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, editora Atual" e o livro "Matemática Ensino Médio, volume 1, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora

Saraiva", foram escolhidos para demonstrar como o assunto (inequações-produto e inequações-quociente) é tratado no ensino médio, por possuírem uma abordagem mais cuidadosa e completa que os demais, visto que os outros livros didáticos abordam o assunto por essa mesma óptica, porém resumindo demais e portanto mais mostrando como se resolve, do que explicando o que está sendo feito. Devo, ainda ressaltar que dificilmente as escolas de ensino médio adotam o primeiro livro mencionado acima ("Fundamentos de Matemática Elementar"), já que tal livro faz parte de uma coleção com 10 volumes, e que por questões financeiras, as escolas adotam uma coleção de três volumes, um para cada série do ensino médio, ou até mesmo um volume único para todo o ensino médio. Na maioria das vezes essa coleção é adquirida pelas escolas para suas bibliotecas ou adquiridas por professores como fonte de consulta, já que de longe é a coleção mais completa.

Segundo o livro didático "Fundamentos de Matemática Elementar", volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, editora Atual (página 113-A/114-A), que é importante ressaltar que quando trata de inequações-produto, anteriormente já tratou da resolução de sistemas de inequações de grau 1:

- *"Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações* $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ *e* $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ *são denominadas inequações-produto."*

- *"Vejamos por exemplo, como determinamos o conjunto-solução S da inequação* $f(x) \cdot g(x) > 0$ *."*

- *"De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número* x_0 *é solução da inequação se, e somente se,* $f(x_0)$ *e* $g(x_0)$*, não nulos, tem o mesmo sinal."*

- *Assim, são possíveis dois casos:*
  1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$
  Se S_1 *e* S_2 *são respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então,* $S_1 \cap S_2$ *é o conjunto-solução do sistema.*
  2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$ *Se* S_3 *e* S_4 *são respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então,* $S_3 \cap S_4$ *é o conjunto-solução do sistema.*

- *"Daí concluímos que o conjunto-solução do produto* $f(x) \cdot g(x) > 0$ *é*

$(S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$ *.”*

- *“Raciocínio análogo para a inequação* $f(x) \cdot g(x) < 0$ *.”*

Logo após faz-se um exemplo no qual é apresentado o quadro de sinais.

Depois do quadro de sinais e de se fazer dois exemplos, o primeiro envolvendo o sinal (>), e o segundo envolvendo o sinal (<), ambos em ralação a 0, tem-se na página 116-A:

- *“A inequação* $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ *tem por conjunto-solução* S *a reunião do conjunto-solução* S_1 *da inequação* $f(x) \cdot g(x) > 0$ *com o conjunto-solução* S_2 *da equação* $f(x) \cdot g(x) = 0$*.”*

Mais alguns exercícios. Após esses exercícios, na página 120-A, temos:

- *“Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$,$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ *e* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ *são denominadas inequações-quociente.”*
- *“Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.”*

E com mais uma bateria de exercícios o assunto é encerrado.

Segundo o livro didático “Matemática Ensino Médio, de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editora Saraiva, volume 1” (páginas 122 e 123), sendo f e g funções reais de variável real:

- *“Denominamos inequação-produto a cada uma das seguintes inequações.*
  $f(x) \cdot g(x) > 0, \qquad f(x) \cdot g(x) < 0 \qquad f(x) \cdot g(x) \geq 0 \qquad f(x) \cdot g(x) \leq 0$”
- *“Denominamos inequação-quociente a cada uma das seguintes inequações.*
  $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \qquad \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \qquad \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$”
- *“Devemos lembrar que, sendo a e b dois números reais quaisquer, valem as seguintes relações numa desigualdade:*

$a \cdot b > 0$, *apenas se* $a > 0$ *e* $b > 0$ *ou* $a < 0$ *e* $b < 0$

$\frac{a}{b} > 0$, *apenas se* $a > 0$ *e* $b > 0$ *ou* $a < 0$ *e* $b < 0$

$a \cdot b < 0$, *apenas se* $a < 0$ *e* $b > 0$ *ou* $a > 0$ *e* $b < 0$

$\frac{a}{b} < 0$, *apenas se* $a < 0$ *e* $b > 0$ *ou* $a > 0$ *e* $b < 0$

$a \cdot b = 0$, *apenas se* $a = 0$, *ou* $b = 0$, *ou* $a = 0$ *e* $b = 0$."

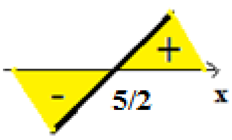
- *"Para resolvermos uma inequação-produto (ou uma inequação-quociente), estudamos o sinal de cada fator (ou o sinal do numerador e do denominador) e organizamos um quadro de sinais para o produto (ou quociente), escolhendo como resposta os valores de x que satisfazem o sinal da inequação."*

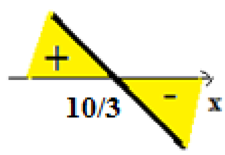
Após essa abordagem são apresentados alguns exercícios resolvidos, e depois com uma bateria de exercícios o assunto é encerrado.

Abaixo faço cinco exemplos/exercícios resolvidos exemplificando o que pode ser encontrado nos livros didáticos do ensino médio.

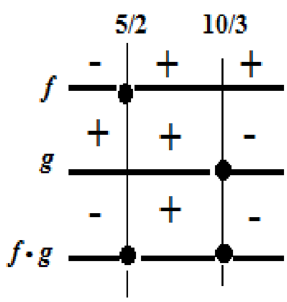
Exemplo 2.2.1. $(2x - 5)(10 - 3x) \geq 0$ (Coleção Temas e Metas, volume 1, Antonio dos Santos Machado editora Atual 2ª edição pagina 83)

Primeiro devemos estudar o sinal das funções envolvidas.





Agora montamos o quadro de sinais:



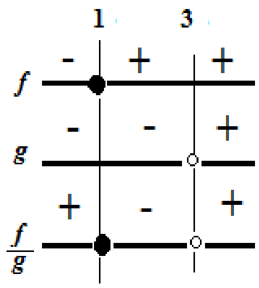
Como estamos querendo os intervalos onde $f \cdot g \geq 0$, temos como solução

$S = \{\ x \in \mathbf{R}; \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{10}{3}\ \}$

Exemplo 2.2.2. $\dfrac{x-1}{x-3} \geq 0$ ("Matemática Uma nova abordagem versão trigonometria", volume 1, José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, FTD, pagina 184)

Primeiro devemos estudar o sinal das funções envolvidas.

Agora montamos o quadro de sinais, lembrando que a função que se encontra no denominador não pode dar zero:



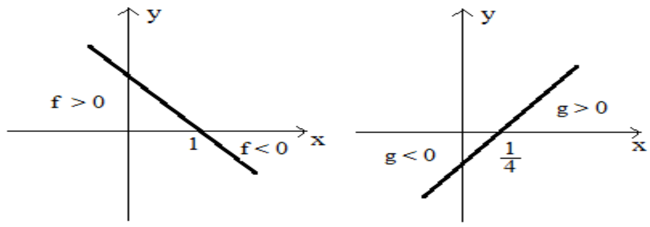
Como estamos querendo o ou os intervalos onde $\dfrac{f}{g} \geq 0$, temos como solução $S = \{\ x \in \mathbf{R}; x \leq 1 \text{ ou } x > 3\ \}$

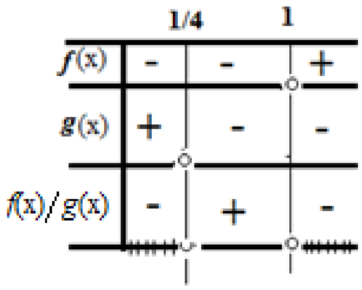
Exemplo 2.2.3. $\dfrac{2x+1}{4x-1} < 1$ (Coleção Temas e Metas, volume 1, Antonio dos Santos Machado editora Atual 2ª edição pagina 85)

Primeiro devemos colocá-la na forma de inequação-quociente, deixando "zero" no segundo membro:

$$\frac{2x+1}{4x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-4x+1}{4x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+2}{4x-1} < 0$$

Agora façamos $f(x) = -2x+2$ e $g(x) = 4x-1$. Temos:

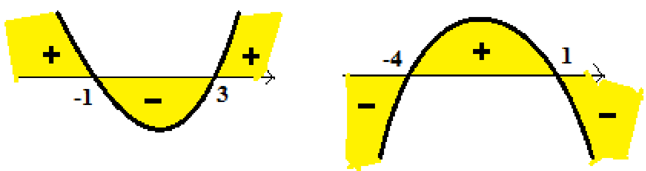




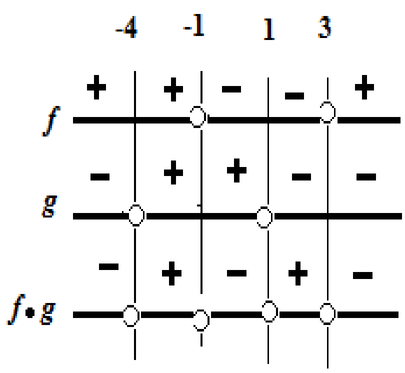
Como queremos $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, o conjunto-solução é $\{\ x \in \mathbf{R} | x < \frac{1}{4}$ ou $x > 1\ \}$.

Exemplo 2.2.4. $(x^2 - 2x - 3)(-x^2 - 3x + 4) > 0$ (Matemática Uma nova abordagem versão trigonometria, volume 1, José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, FTD, pagina 218)

Primeiro devemos estudar o sinal das funções envolvidas.



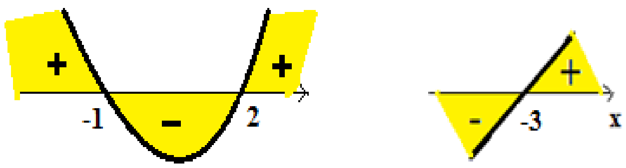
Agora montamos o quadro de sinais:



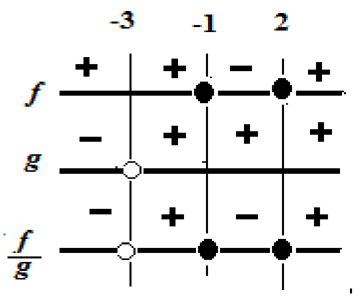
Como estamos querendo o ou os intervalos onde $f \cdot g > 0$, temos como solução $S = \{\ x \in \mathbf{R}; -4 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 3\ \}$

Exemplo 2.2.5. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x+3} \leq 0$ (questão retirada de uma das minhas listas de exercícios)

Primeiro devemos estudar o sinal das funções envolvidas.



Agora montamos o quadro de sinais, novamente, lembrando que a função que se encontra no denominador não pode dar zero:



Como estamos querendo o, ou, os intervalos onde $\dfrac{f}{g} \leq 0$, temos como solução $S = \{\ x \in \mathbb{R}; x < -3 \text{ ou } -1 \leq x \leq 2\ \}$

Apenas dois dos livros consultados, o livro: "Matemática Uma nova abordagem, volume 1, de, José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, editora FTD" e o livro: "Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, editora Atual", tratam particularmente dos casos em que $(ax+b)^n > 0$, $(ax+b)^n < 0$, $(ax+b)^n \geq 0$ e $(ax+b)^n \leq 0$ com $n \in \mathbb{N}^*$, no caso desse último, esse conceito fica estendido para outras funções, não apenas função afim. Abaixo transcrevo parte do livro "Fundamentos de Matemática Elementar", novamente por ser o mais completo. (página 117-A/118-A)

- *Dentre as inequações produto, são importantes as inequações:*
  $(f(x))^n > 0$, $(f(x))^n < 0$, $(f(x))^n \geq 0$ *e* $(f(x))^n \leq 0$, *onde* $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Para resolvermos estas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:*
  1ª) *"toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base", isto é*

$$a^{2n+1} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

$$a^{2n+1} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$a^{2n+1} < 0 \Leftrightarrow a < 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

  2ª) *"toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo", isto é*

$$a^{2n} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

- *Assim sendo, temos as seguintes equivalências:*

$$(f(x))^n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$(f(x))^n < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$(f(x))^n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall x \in \mathrm{D}(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$(f(x))^n \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

3 Proposta

3.1 Fundamentação Teórica

Nessa seção será feita a fundamentação matemática da proposta, onde cuidadosamente iremos embasar todas as conclusões que utilizaremos para a implementação do método nessa dissertação. Começaremos definindo corpo, anel, corpo algebricamente fechado, polinômios com coeficientes em um corpo, antes de falarmos em raízes, sinal da função, multiplicidade de uma raiz e etc. Usaremos conclusões do Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema do Valor Intermediário, e outras, para fundamentar tais conclusões.

Definição 3.1.1. Seja K um conjunto com duas operações $(+)$ e $(\cdot)$, chamadas de adição e multiplicação, respectivamente, onde K possui:

Elemento neutro. Se as operações de adição e multiplicação possuírem elementos neutros em K, isto é: na adição, $a + 0 = a$, e na multiplicação, $a \cdot 1 = a$.

Simétrico. Se para todo elemento a pertencente a K, existir um simétrico a', ou seja, para todo elemento a de K, existe a', tal que $a + a' = 0$.

Inverso. Se para todo elemento a de $K\backslash\{0\}$, existir um único inverso, ou seja, para $a \neq 0$ pertencente a K, existe a' , tal que $a \cdot a' = 1$. Diremos que K é um *corpo*, se estas operações possuírem as seguintes propriedades: *Comutatividade.* Se para todo elemento a e b de K, as operações de adição e multiplicação forem comutativas, ou seja: $a+b = b+a$ e $a\cdot b = b\cdot a$. *Associatividade.* Se para todo elemento a, b e c de K, pudermos sempre fazer $a + (b + c) = (a + b) + c$, para a adição, e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para a multiplicação. *Distributividade.* Se para todo elemento a, b e c de K, pudermos sempre fazer: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Logo, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, são exemplos da estrutura algébrica denominada corpo.

Definição 3.1.2. Caso as operações $(+)$ e $(\cdot)$ de K possuírem todas as propriedades que determinam que K é um corpo, a não ser, ocasionalmente, o fato de possuir inverso, dizemos que K é um ANEL.

Caso o anel K, possua a propriedade: $\forall a, b \in K, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, K é dito um *domínio de integridade*. Portanto o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, são domínios de integridade, por exemplo.

Definição 3.1.3. Sejam n, $j \in \mathbb{N}$ (estamos considerando $0 \in \mathbb{N}$), $a_j \in K$ e x^j, onde $0 \leq j \leq n$, e x um símbolo não pertencente a K, de modo que $x^0 = 1$ e $x^1 = x$. Chamaremos de polinômio $f(x)$ com coeficientes em K, a expressão formal do tipo:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Nessa expressão os elementos a_j são chamados de coeficientes do polinômio $f(x)$, as parcelas $a_j x^j$, de termos e os termos $a_j x^j$, tais que $a_j \neq 0$, de monômios de grau j do polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 , é chamado de termo constante ou termo independente de x . O polinômio $f(x) = a_0$ é chamado de polinômio constante (no caso do polinômio constante em que $a_0 = 0$, este será chamado de polinômio nulo e poderá ser escrito como: $f(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^n$, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$. Em particular estaremos mais interessados nos polinômios com coeficientes reais.

Definição 3.1.4. Sendo $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, como na definição acima, diremos que $f(x)$ possui grau p, quando p for o maior expoente j da base x existente em $f(x)$, onde $a_j \neq 0$. Esse coeficiente a_j será então denominado coeficiente líder do polinômio. E quanto a p escreve-se $p = gr(f(x))$. Quando o coeficiente líder é igual a 1, o polinômio receberá a denominação de polinômio mônico.

Definição 3.1.5. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz do polinômio com coeficientes reais $f(x)$, quando $(x - \alpha)$ dividir $f(x)$, ou seja, quando existir o polinômio $q(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, tal que $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ sem que necessariamente $q(\alpha) = 0$.

Definição 3.1.6. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$, é uma raiz de multiplicidade m do polinômio com coeficientes reais $f(x)$, quando $(x - \alpha)^m$ dividir $f(x)$ e $(x - \alpha)^{m+1}$ não dividir $f(x)$, ou seja, quando existir o polinômio $f(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, tal que $f(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x)$ onde $q(\alpha) \neq 0$. Sendo assim, dizemos que α é uma raiz simples de $f(x)$, se $m = 1$, e uma raiz múltipla, se $m \geq 2$.

Definição 3.1.7. Um corpo K é denominado um algébricamente fechado quando todo polinômio não constante com coeficientes em K tem uma raiz em K.

Teorema 3.1.1. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui uma raiz complexa.*$\blacksquare$

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada no livro "Polinômios e Equações Algébricas (Coleção PROFMAT)", de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, páginas 190, 191 e 192, 1ª edição (Sociedade Brasileira de Matemática).

Corolário 3.1.1. *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $f(x)$ em $K[x]$, onde $gr(f(x)) \geq 1$. Podemos afirmar que existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$, não necessariamente distintos, e $\alpha \in K \backslash \{0\}$ tais que: $f(x) = \alpha(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)$.*$\blacksquare$

Isso pode ser concluído pelo fato de que o Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado. É também importante perceber que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado.

Observação: O símbolo $K[x]$ será utilizado para designar um anel de polinômios com coeficientes no corpo K.

Teorema 3.1.2. *Todo polinômio $f(x)$ com coeficientes complexos e grau $n \geq 1$ se escreve, de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como: $f(x) = \alpha(x - \beta_1)^{r_1}(x - \beta_2)^{r_2} \ldots (x - \beta_s)^{r_s}$, onde $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ é o coeficiente líder de $f(x), \beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_s$, são números complexos distintos e $r_1, r_2 \ldots, r_s$ são inteiros positivos tais que $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n$.*$\blacksquare$

Mais detalhes desse Teorema podem ser encontrados no livro 'Polinômios e Equações Algébricas (Coleção PROFMAT)', de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, página 133, 1ª edição (Sociedade Brasileira de Matemática).

Proposição 3.1.1. *Seja K um domínio de integridade e seja $f(x)$ em $K[x] \backslash \{0\}$. Se $f(x)$ tem grau n, então $f(x)$ tem no máximo n raízes em K.*$\blacksquare$

Observar que o número de raízes de $f(x)$ será n se K for um corpo algebricamente fechado e poderá ser menor que n, se K não for um corpo algebricamente fechado (isso é decorrente do Teorema Fundamental da Álgebra).

Maiores informações sobre esse teorema estão no livro: 'Polinômios e Equações Algébricas (Coleção PROFMAT)', de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, página 130, 1ª edição (Sociedade Brasileira de Matemática).

Definição 3.1.8. Seja K um corpo e $f(x)$ um polinômio de grau n pertencente a $K[x]$. Dizemos que $f(x)$ é redutível em $K[x]$ se, somente se, existem polinômios $g(x)$ e $h(x)$ em $K[x]$, de graus não necessariamente distintos m e p, respectivamente, tais que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, com $0 < m, p < n$. Caso contrário o polinômio $f(x)$ é dito irredutível em $K[x]$.■

Proposição 3.1.2. *Todo polinômio $f(x)$ de grau 1 é irredutível.*■

Isso ocorre porque não se consegue decompor $f(x)$ pertencente ao anel $K[x]$, em fatores $g(x)$ e $h(x)$, também pertencentes a $K[x]$, de modo que os graus m e p, respectivamente, de $g(x)$ e $h(x)$, satisfaçam a desigualdade $0 < m, p < 1$.

Teorema 3.1.3. *Todo polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ que possuir $gr(f(x)) > 1$ é redutível.*

Demonstração: Vimos anteriormente que todo polinômio de grau 1 é irredutível, porém quando o grau é maior que 1, o teorema fundamental da álgebra permite-nos afirmar que o polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ possui uma raiz β_1, pois $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado. Assim $f(x)$ pode ser escrito: $f(x) = \alpha(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n)$, fazendo $q(x) = \alpha(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n)$, podemos escrever $f(x) = q(x)(x - \beta_1)$, e assim sendo $gr(q(x)) + 1 = gr(f(x)) = n \geq 2$, portanto temos que $gr(q(x)) + 1 = n$, logo $gr(q(x)) < n$. Como $gr(q(x)) + 1 \geq 2$, então $gr(q(x)) \geq 1$. Portanto: $0 < gr(q(x)), 1 < n$, mostrando que $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ é redutível.□

Teorema 3.1.4. *Um polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ em $R[x]$ possui duas raízes complexas e não reais, conjugadas.*

Demonstração: De fato, como $\Delta < 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante de $f(x)$), temos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Percebe-se que assim podemos escrever porque $\sqrt{(\Delta)(-1)} = \pm\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{-1}$. Agora, fazendo o número real $\sqrt{-\Delta} = d$, temos as raízes imaginárias e conjugadas $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{di}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{di}{2a}$. Fazendo a contrapartida, se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então $f(x) = ax^2 + bx + c$ possuirá duas raízes reais, $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\Delta}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\Delta}{2a}$.□

Corolário 3.1.2. *Um polinômio* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ *é irredutível em* $R[x]$*.*

Demonstração: De fato, isso ocorre porque se $f(x) = ax^2+bx+c$, com $\Delta = b^2-4ac < 0$, fosse redutível, seria divisível por um polinômio de grau 1, digamos $dx + e$, com $d \neq 0$, fazendo com que $f(x)$ possua a raiz real $\frac{-e}{d}$, o que contradiz o fato de $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.□

Definição 3.1.9. Seja o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ com coeficientes em $\mathbb{C}$. O polinômio $\overline{f}(x) = \overline{a}_n x^n + \overline{a}_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \overline{a}_0$, onde $\overline{a}_j$ é o conjugado de a_j, para $j = 0, 1, \ldots, n$, é definido como o polinômio conjugado de $f(x)$.

Proposição 3.1.3. *Sejam* $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$*. A conjugação possui as seguintes propriedades:*

1. *Se* $f(x) = g(x) + h(x)$*, então* $\overline{f}(x) = \overline{g}(x) + \overline{h}(x)$
2. *Se* $f(x) = g(x) \cdot h(x)$*, então* $\overline{f}(x) = \overline{g}(x) \cdot \overline{h}(x)$
3. $\overline{f}(x) = f(x)$ *se, e somente se,* $f(x) \in R[x]$
4. *Se* $\beta \in C$*, então* $\overline{f}(\overline{\beta}) = \overline{f(\beta)}$■

Essa proposição está detalhadas no livro: 'Polinômios e Equações Algébricas (Coleção PROFMAT)', de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, página 138, 1ª edição (Sociedade Brasileira de Matemática).

Teorema 3.1.5. *As raízes complexas não reais de* $f(x) \in R[x]$ *ocorrem aos pares conjugados.*

Demonstração: Primeiro deve-se observar que sendo $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de multiplicidade m de $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, podemos afirmar que $g(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$ e assim sendo da proposição 3.1.3, $\overline{g}(x) = (x - \overline{\alpha})^m \cdot \overline{q}(x)$. Agora observando que $\overline{q}(\overline{\alpha}) = \overline{q(\alpha)} \neq \overline{0} = 0$, fica mostrado que em $\overline{g}(x)$ não tem mais raízes $\overline{\alpha}$ além das m, presentes em $(x - \overline{\alpha})^m$. Logo fica estabelecido que $\overline{g}(x)$ possui a raiz $\overline{\alpha}$ de multiplicidade m. Portanto seja agora $f(x) \in R[x]$ e $\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade m. Da conclusão acima $\overline{\beta}$ é uma raiz também de multiplicidade m do polinômio $\overline{f}(x)$. Porém como $f(x) \in R[x]$, temos que necessariamente $\overline{f}(x) = f(x)$ e assim temos que $\overline{\beta}$ com multiplicidade m, também é raiz de $f(x)$, o que nos permite dizer que as raízes complexas não reais ocorrem aos pares conjugados.□

Com isso também podemos concluir que todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem que possuir, pelo menos, uma raiz real.

Teorema 3.1.6. *Polinômios mônicos irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$ *são da forma* $x-a$ *ou da forma* x^2+bx+c*, onde* $\Delta = b^2-4c < 0$*.*

Demonstração: De fato, como já visto, temos que os polinômios de grau 1, cuja raiz pertence a K são irredutíveis em qualquer corpo K. Vimos também que quando $\Delta = b^2-4c < 0$, o polinômio mônico $f(x) = x^2+bx+c$, não possui raízes reais, e assim sendo é irredutível em $R[x]$. Caso contrário temos dois casos:

- CASO 1: $f(x) = x^2+bx+c$, onde $\Delta = b^2-4c \geq 0$, como também já visto, possuirá duas raízes reais x_1 e x_2, e assim sendo é divisível por $x-x_1$ e $x-x_2$, pois como visto na definição 3.1.8, teríamos $g(x) = x-x_1$ e $h(x) = x-x_2$, e assim sendo $f(x)$ seria redutível em $R[x]$, pois teríamos $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$, onde $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ com $0 < gr(g(x)), gr(h(x)) < gr(f(x))$.

- CASO 2: $f(x) \in R[x]$ e $gr(f(x)) > 2$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(x)$, temos duas situações a averiguar:

  1. Se $\alpha \in R$, então $x-\alpha$ divide $f(x)$ em $R[x]$, e sendo assim, $f(x)$ seria redutível em $R[x]$.

  2. Se $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, então do teorema 3.1.5, podemos afirmar que $\overline{\alpha} \neq \alpha$ são raízes de $f(x)$, logo $(x-\overline{\alpha})(x-\alpha)$ divide $f(x)$ em $R[x]$. A confirmar que os coeficientes de $(x-\overline{\alpha})(x-\alpha)$ são reais. De fato, observar que $(x-\overline{\alpha})(x-\alpha) = x^2-(\overline{\alpha}+\alpha)x+\overline{\alpha}\alpha = x^2-2\mathrm{Re}(\alpha)\cdot x+|\alpha|^2.\square$

Teorema 3.1.7. *Todo polinômio* $f(x)$ *com coeficientes reais e grau* $n \geq 1$ *se escreve de modo único, como produto uma constante e polinômios mônicos irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$*, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: Dos teoremas 3.1.6 e 3.1.2, temos que:

$$f(x) = \alpha(x-\beta_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_s)^{r_s}\cdot(p_1(x))^{m_1}\cdot\ldots\cdot(p_t(x))^{m_t},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é o coeficiente líder de $f(x)$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ são suas raízes reais distintas, $p_k(x) = x^2+b_kx+c_k$ são polinômios distintos com coeficientes reais tais que $(b_k)^2-4c_k < 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, t$ e $r_1, \ldots, r_s, m_1, \ldots, m_t \in \mathbb{N}$, são tais que $r_1+\ldots+r_s+2(m_1+\ldots+m_t) = n.\square$

Definição 3.1.10. Dado um conjunto K, representamos por $K \times K$ o produto cartesiano de K com ele próprio. Uma operação $(*)$ em K é por definição apenas uma função:

$$\begin{array}{rccc} \cdot * \cdot : & K \times K & \rightarrow & K \\ & (a, b) & \rightarrow & a * b \end{array}$$

Seja então $K = \mathbb{R}$, e a função polinomial de coeficientes reais $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, (como na definição 3.1.3) Observe que cada elemento x do domínio, corresponde a uma única imagem $f(x)$, e que a diferença entre polinômio de coeficientes reais e função polinomial é apenas conceitual.

Teorema 3.1.8. *Toda função polinomial é contínua e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ possui o mesmo sinal do coeficiente líder.*

Demonstração: De fato, para todo $x_0 \in R$ temos: $f(x_0) = y_0$,

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = y_0$$

e

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = y_0$$

Assim sendo, vemos que $f(x)$ é contínua. Agora vamos mostrar que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ possui o mesmo sinal do coeficiente líder:

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) = \lim_{x \to +\infty} x_n (a_n \cdot \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^n} + \ldots + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n)$$

Portanto podemos concluir que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, é sempre:

- positivo, se $a_n > 0$;
- negativo, se $a_n < 0$.$\square$

Definição 3.1.11. O *sinal da função* $f(x)$ para a abscissa x é:

- positivo, se $f(x) > 0$
- negativo, se $f(x) < 0$
- nulo ou zero, se $f(x) = 0$

Definição 3.1.12. Os *zeros reais de uma função* (também chamados raízes da função) são os valores de x, pertencentes ao domínio da função $D \subset \mathbb{R}$, que tornam $f(x) = 0$. No caso das funções polinomiais são as raízes reais do polinômio.

Proposição 3.1.4. *Seja $f(x)$ uma função não identicamente nula e contínua. O sinal da função pode sofrer alterações apenas nos zeros reais da função.*

Demonstração: Seja $f(x)$ uma função contínua não nula. Se f não possuir zeros reais, f nunca muda de sinal, pois para que ocorra a mudança de sinais, no caso da mudança acontecer do sinal positivo para o negativo, os valores de f precisam vir decrescendo, passar pelo zero, para depois sim assumir valores negativos (lembrando que um número complexo não real não pode ser nulo, nem tão pouco ser positivo ou negativo, portanto quando dizemos que os valores estão decrescendo, estamos pensando em uma reta real, que no caso é o eixo das ordenadas), e no caso da mudança acontecer do sinal negativo para o positivo, os valores de f precisam vir crescendo, passar pelo zero, para depois assunir valores positivos, pois como f é contínua, não tem como haver a inversão de sinais sem essa função assumir o valor zero, isso somente seria possível com uma descontinuidade em f. Observe que, mesmo a função que tangencia o eixo das abscissas, tem seu sinal alterado no ponto de tangencia, que é o zero da função, pois nesse ponto a função não teria sinal, seria nula.$\blacksquare$

Proposição 3.1.5. *Seja μ a maior raiz real da função polinomial $f(x)$. Então todo x no intervalo $(\mu, +\infty) \subset \mathbb{R}$, terá o mesmo sinal do coeficiente líder de $f(x)$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.4 sabemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ possui o mesmo sinal do coeficiente líder. Tal sinal não sofre alteração após a maior raiz real de $f(x)$, ou seja, considerando μ a maior raiz real de $f(x)$ o sinal de $f(x)$ será igual ao sinal do coeficiente líder de $f(x)$ para todo $x > \mu$.$\square$

Teorema 3.1.9. *Seja α um zero real de uma função polinomial $f(x)$. Temos então, dois casos distintos, que ocorrerão devido à paridade de α:*

1. *Se a multiplicidade de α for par, então existe uma vizinhança de α na qual $f(x)$ possui sinais iguais à direita e à esquerda de α.*

2. *Se a multiplicidade de α for ímpar, então existe uma vizinhança de α na qual $f(x)$ possui sinais contrários à direita e à esquerda de α.*

Demonstração: Para provar isso vamos considerar α sendo uma raiz real do polinômio $f(x) \in R[x]$, com multiplicidade m. Logo teremos então que $f(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Sendo assim temos dois casos a considerar:

1. Caso 1: m é par. Logo $m = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, e podemos ter $q(\alpha) > 0$ ou $q(\alpha) < 0$.

   - $q(\alpha) > 0$, portanto
   $$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n} \cdot q(x) > 0,$$
   visto que
   $$\lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n} > 0;$$
   e
   $$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n} \cdot q(x) > 0,$$
   visto que
   $$\lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n} > 0.$$
   Portanto quando $q(\alpha) > 0$ e m é par, temos uma vizinhança de α, cuja direita e esquerda de α fazem com que $f(x)$ possua o mesmo sinal, no caso, positivo.

   - $q(\alpha) < 0$, portanto $\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n} \cdot q(x) < 0$, visto que $\lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n} > 0$; e $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n} \cdot q(x) < 0$, visto que $\lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n} > 0$. Portanto quando $q(\alpha) < 0$ e m é par, temos uma vizinhança de α, cuja direita e esquerda de α fazem com que $f(x)$ possua o mesmo sinal, no caso, negativo.

2. Caso 2: m é ímpar. Logo $m = 2n+1$, onde $n \in N$, e podemos ter $q(\alpha) > 0$ ou $q(\alpha) < 0$.

   - $q(\alpha) > 0$, portanto
   $$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n+1} \cdot q(x) < 0,$$
   visto que
   $$\lim_{x \to \alpha^-} (x-\alpha)^{2n+1} < 0$$
   e
   $$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n+1} \cdot q(x) > 0,$$
   visto que
   $$\lim_{x \to \alpha^+} (x-\alpha)^{2n+1} > 0.$$

Portanto quando $q(\alpha) > 0$ e m é ímpar, temos uma vizinhança de α, cuja direita e esquerda de α fazem com que $f(x)$ possua sinais contrários.

- $q(\alpha) < 0$, portanto

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} (x-\alpha)^{2n+1} \cdot q(x) > 0,$$

visto que

$$\lim_{x\to\alpha^-} (x-\alpha)^{2n+1} < 0$$

e

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} (x-\alpha)^{2n+1} \cdot q(x) < 0,$$

visto que

$$\lim_{x\to\alpha^+} (x-\alpha)^{2n+1} > 0.$$

Portanto quando $q(\alpha) < 0$ e m é ímpar, temos uma vizinhança de α, cuja direita e esquerda de α fazem com que $f(x)$ possua sinais contrários.$\square$

Obs.: Esse teorema, mais a proposição 3.1.5, são a espinha dorsal do método de resolução de inequações-produto e inequações-quociente, que aqui venho propor.

Observe que as raízes não reais de uma função polinomial $f(x) \in R[x]$ não causam impacto algum no estudo do sinal de $f(x)$. De fato, as raízes não reais do polinômio $f(x) \in R[x]$, como visto no Teorema 3.1.5, ocorrem em pares conjugados, e não constituem zeros reais da função. No teorema 3.1.7, vimos que todo polinômio $f(x) \in R[x]$, é escrito na forma fatorada de modo único a não ser pela ordem de seus fatores mônicos e de seu coeficiente líder, lembrando que esses fatores são: o coeficiente líder, os polinômios mônicos de grau 1 e/ou os polinômios de grau 2 do tipo $f(x) = x^2 + bx + c$ onde o discriminante é negativo. Devemos também observar o fato desses polinômios de grau 2 e discriminante negativo, possuírem sempre sinal positivo, independente do valor atribuído a abscissa x (basta calcularmos $f'(x) = 2x + b$ e $f''(x) = 2$, e perceber que sendo a derivada segunda igual a 2, o gráfico de f possuirá concavidade para cima, e da derivada primeira, que para $x < \frac{-b}{2}$, f é decrescente, que para $x < \frac{-b}{2}$, f é crescente, fazendo com que o ponto de abscissa $x = \frac{-b}{2}$ seja um mínimo local; portanto o valor mínimo de f é $f(\frac{-b}{2}) = \frac{-b^2+4c}{4}$, como $\Delta = b^2 - 4c < 0$, temos que $-b^2 + 4c > 0$, e com isso: que para todo $x \in R$, $f(x)$ é positiva). Portanto os polinômios mônicos de grau 2 são sempre positivos. Sendo assim, o estudo do sinal de $f(x) = \alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} \cdot \underbrace{(p_1(x))^{m_1}}_{+} \cdot \underbrace{\ldots}_{+} \cdot \underbrace{(p_t(x))^{m_t}}_{+}$, onde os índices de β e p são números naturais positivos e consecutivos, será feito por $g(x) = \alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s}$.

3.2 Procedimento para resolução de inequações polinomiais

Resolução da inequação polinomial $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$, quando $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Como acabamos de ver, o sinal de uma função polinomial $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, escrita na forma fatorada, como

$$f(x) = \alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} \cdot (p_1(x))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (p_t(x))^{m_t},$$

e o sinal de $f(x)$ poderá ser estudado, pela função

$$g(x) = \alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s}.$$

Sendo assim para $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ e $f(x) \geq 0$, devemos ter, respectivamente,

$$\alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} < 0,$$

$$\alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} > 0,$$

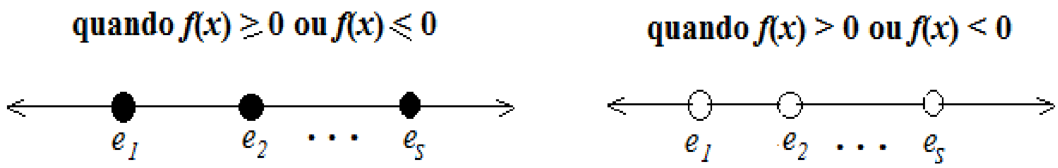
$$\alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} \leq 0$$

e

$$\alpha(x-\beta_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_s)^{r_s} \geq 0.$$

Essas inequações são chamadas de inequações-produto, cuja resolução, usando-se as conclusões anteriores, poderá ser feita da seguinte maneira:

- Numa reta real, marcarmos todas as raízes reais do polinômio $f(x)$, tomando o cuidado de observar a multiplicidade de cada uma dessas raízes. Sendo $e_1, \ldots, e_s$, uma sequência crescente feita com $\beta_1, \ldots, \beta_s$, onde cada e_j, com $j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq s$, será marcado como fechado quando $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$ e aberto quando $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$, visto que no primeiro caso queremos também na solução os valores que anulam a função f e no segundo caso não. Observar a figura abaixo:



- Da Proposição 3.1.5, podemos concluir que o sinal de $f(x)$ para $x > e_s$ é igual ao sinal do coeficiente líder α.

- Do Teorema 3.1.9, temos que o sinal na vizinhança de cada uma dessas raízes dependerá da multiplicidade de cada raiz, ou seja, da paridade de $r_1, \ldots, r_s$, como já temos o sinal da função quando $x > e_s$, podemos vir colocando da direita para a esquerda da reta real os sinais de cada intervalo compreendido entre as raízes reais, tomando-se o cuidado de manter na esquerda de uma raiz o sinal que estava a sua direita quando a multiplicidade dessa raiz for par e trocando o sinal quando a multiplicidade dessa raiz for ímpar, até terminarmos a reta. Dessa forma temos nessa reta o estudo do sinal da função f e sendo assim podemos responder os intervalos que satisfazem a inequação proposta.

3.3 Resolução de inequações-produto e inequações-quociente

3.3.1 Inequações-produto

Como vimos no Teorema 3.1.7, todo polinômio $f(x) \in R[x]$, pode ser escrito de maneira única a não ser pela ordem de seus fatores mônicos irredutíveis. Também vimos na seção 3.2, que podemos resolver inequações envolvendo o polinômio $f(x)$, citado acima, analisando o coeficiente líder e os fatores que compõem $f(x)$.

Sabemos que sendo $\mathbb{R}$ um corpo, que a inequação do tipo $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$ pode ser resolvida da mesma forma quando os fatores que compõem $f(x)$ não são mônicos e irredutíveis, afinal a inequação é a mesma, com os mesmos zeros, mesmo coeficiente líder e mesmo comportamento gráfico, apenas foi escrita de forma diferente. Portanto ao aplicarmos o método proposto numa inequação-produto, não é necessário que os fatores sejam mônicos e irredutíveis, pois trata-se do estudo do sinal da mesma função f.

O maior cuidado a ser tomado, é com o coeficiente líder de $f(x)$, que pode estar fatorado e distribuído entre os fatores que compõem $f(x)$. Porém como não nos interessa o valor numérico do coeficiente líder, nos interessa apenas o seu sinal, fica fácil estabelecê-lo fazendo-se o produto dos sinais dos coeficientes líderes dos fatores.

Por exemplo: seja o polinômio

$$f(x) = -36x \cdot (x+1)^2(x-1)^3(x-3)(x+2)(x+4)(x^2+4),$$

cujo coeficiente líder é igual a -36 e as raízes reais são 0, -1, 1, 3 ,-2 e -4, onde a raiz -1 possui multiplicidade 2 e a raiz 1 possui multiplicidade 3; as demais raízes possuem multiplicidade 1. Logo quando $x > 3$, f assume o valor do coeficiente líder (negativo), daí em diante basta seguir o passo a passo mencionado na seção 3.2, que teremos o estudo do sinal de f. Porém o mesmo polinômio poderia ser apresentado, por exemplo, como:

$$f(x) = (3x^2+6x)(1-x^2)(x+1)(-6x^2-24)(2x^2-8x+6)(-x^2-3x-4),$$

observe que agora temos seis fatores: o primeiro fator $(3x^2+6x)$ possui 0 e -2 como raizes e coeficiente líder igual a 3 (positivo), o segundo fator $(1-x^2)$ possui -1 e 1 como raízes e coeficiente líder igual a -1 (negativo), o terceiro fator $(x+1)$ possui -1 como raiz e coeficiente líder igual a 1 (positivo), o quarto fator $(-6x^2-24)$ não possui raízes reais e possui coeficiente líder igual a -6 (negativo), o quinto fator $(2x^2-8x+6)$ possui 3 e 1 como raízes e coeficiente líder igual a 2, e finalmente o sexto fator $(-x^2-3x+4)$ que possui -4 e 1 como raízes e coeficiente líder igual a -1 (negativo).
Ou seja, temos as mesmas raízes com as mesmas multiplicidades mencionadas anteriormente. E basta multiplicarmos os coeficientes líderes de cada fator, que teremos -36 como resultado, porém não é necessário o valor do coeficiente líder, precisamos apenas do seu sinal, para que possamos ter o sinal de f, quando $x > 3$.

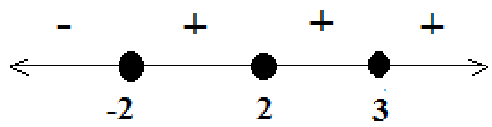
Abaixo, temos um exemplo capaz de explorar de forma satisfatória o que até aqui foi exposto. Resolvendo a inequação-produto:

$$(2-x)(x^2-2x+3)(2x-6)(4-x^2)(x-3) \leq 0.$$

Primeiro teremos que calcular as raízes reais de cada fator. Sendo assim, temos, $x = 2$ no primeiro fator, que o segundo fator não possui raízes reais, $x = 3$ no terceiro fator, $x = \pm 2$ no quarto fator, e $x = 3$ no quinto e último fator. Portanto as raízes são -2, 2 e 3 onde -2 possui multiplicidade 1 e as demais possuem multiplicidade 2.

O sinal do coeficiente líder é o produto entre os sinais dos coeficientes líderes dos fatores: $\underbrace{(2-x)}_{-}\underbrace{(x^2-2x+3)}_{+}\underbrace{(2x-6)}_{+}\underbrace{(4-x^2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{+}$, portanto o coeficiente líder é positivo e assim sendo quando $x > 3$ o polinômio é positivo.

Agora basta colocarmos as raízes em ordem crescente, marcar os intervalos como fechados, pois queremos os valores de x menores ou iguais a zero, e nos atentarmos que 2 e 3 são raízes duplas, portanto sua vizinhança possui sinais iguais, que teremos:



Solução: $S = (-\infty, -2] \cup \{2, 3\}$

Observe como, usando-se o método vigente em nossas escolas a mesma inequação seria resolvida. Resolvendo:

$$(2-x)(x^2-2x+3)(2x-6)(4-x^2)(x-3) \leq 0,$$

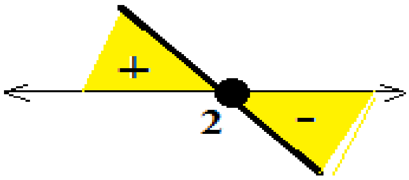
Devemos observar, que todo zero real da função

$$f(x) = (2-x)(x^2-2x+3)(2x-6)(4-x^2)(x-3)$$

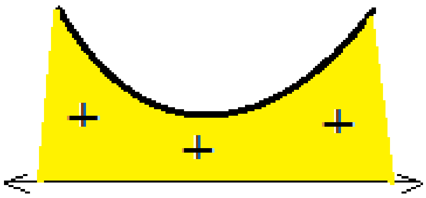
pertence à solução da inequação, pois queremos que o polinômio seja menor ou igual a zero.

Primeiro teríamos que estudar o sinal da função que cada fator representa:

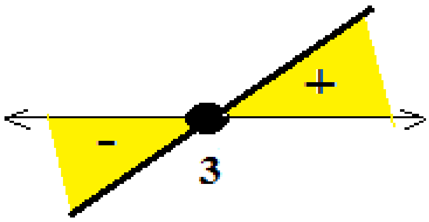
- $A(x) = 2 - x$, é uma função de grau 1, possui como gráfico uma reta decrescente e zero da função $x = 2$, e assim sendo, o estudo do seu sinal será:



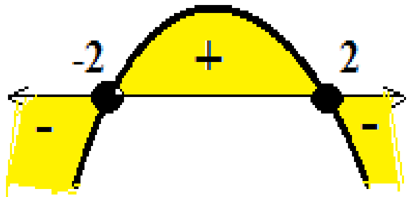
- $B(x) = x^2 - 2x + 3$, é uma função de grau 2, possui como gráfico uma parábola com concavidade para cima e não possui raiz real, e assim sendo, o estudo do seu sinal será:



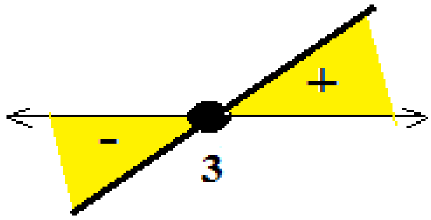
- $C(x) = 2x - 6$, é uma função de grau 1, possui como gráfico uma reta crescente e zero da função $x = 3$, e assim sendo, o estudo do seu sinal será:



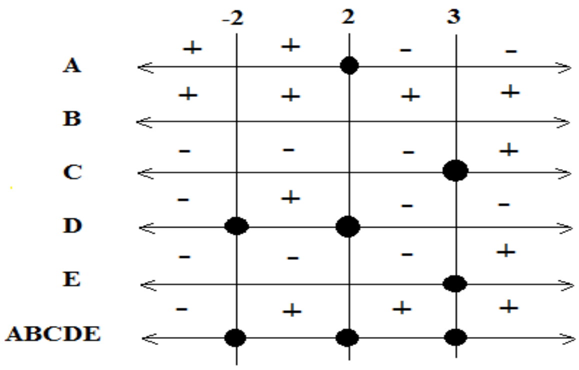
- $D(x) = 4 - x^2$, é uma função de grau 2, possui como gráfico uma parábola com concavidade para baixo e raízes -2 e 2 , e assim sendo, o estudo do seu sinal será:



- $E(x) = x - 3$, é uma função de grau 1, possui como gráfico uma reta crescente e zero da função $x = 3$, e assim sendo, o estudo do seu sinal será:



- Depois fazemos o quadro de sinais, comparando os resultados encontrados anteriormente, para que possamos definir o, ou, os intervalos que fazem com que a função seja não positiva, visto que a inequação propõe que $f(x) \leq 0$:



Observando a última linha do quadro de sinais, teremos a solução, ou seja, os intervalos que fazem com que $f(x)$, seja não negativa. Portanto, temos como solução o conjunto: $S = (-\infty, -2] \cup \{2, 3\}$.

3.3.2 Inequações-quociente

Sejam os polinômios $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $g(x) \in \mathbb{R}[x]$, onde $g(x) \neq 0$. As inequações: $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, são ditas inequações-quociente.

Obs. Nas inequações $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, temos que ter o cuidado adicional de não incluirmos na solução os valores de x que anulam o denominador, ou seja, não devemos incluir na solução os zeros da função $g(x)$, o restante da resolução das inequações-quociente é idêntico à resolução das inequações-produto. Pois sabemos que:

- se $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, o produto $f(x) \cdot g(x)$ será positivo, e a divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ também.
- se $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$, o produto $f(x) \cdot g(x)$ será negativo, e a divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ também.

- se $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$, o produto $f(x) \cdot g(x)$ será negativo, e a divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ também.
- se $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$, o produto $f(x) \cdot g(x)$ será positivo, e a divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ também.

Portanto a única diferença é o fato de que quando $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ o produto $f(x) \cdot g(x)$ será nulo, porém a divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ só será nula quando $f(x) = 0$, visto que o denominador de uma fração não pode ser igual a zero.

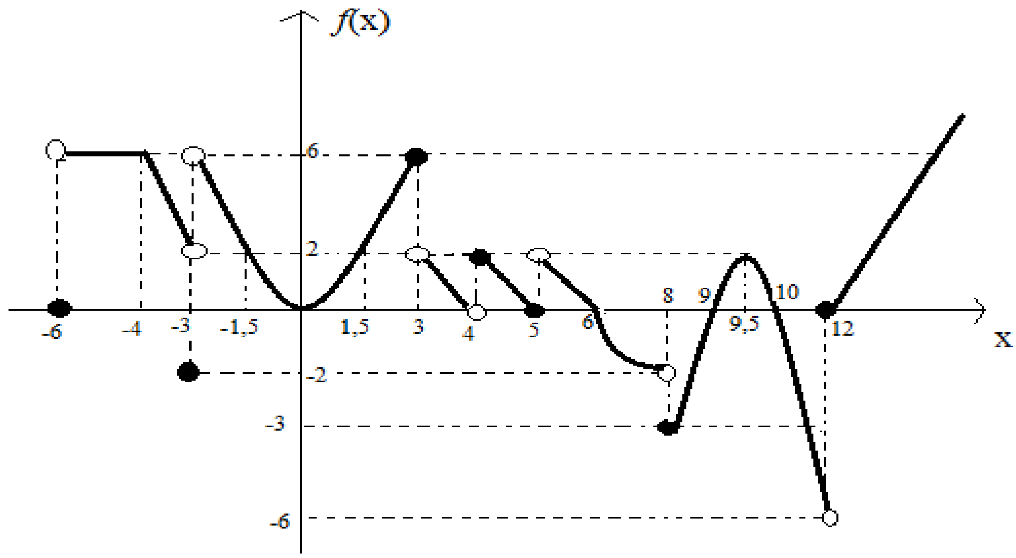
4 Aplicação do método no ensino médio e suas vantagens

Como sabemos, não podemos em salas de aula do ensino médio, fundamentar esse tipo de resolução de inequações-produto e inequações-quociente, utilizando termos como limites, por exemplo, mas podemos fazer outro tipo de abordagem para explicar a esse aluno o que estamos fazendo. Para isso temos que o aluno tenha como pré-requisito o conhecimento de função constante e das funções polinomiais do 1^o e 2^o graus. Por isso creio ser essencial que no momento da introdução dessa proposta, se faça uma revisão rápida sobre tais assuntos, e que nessa revisão sejam inseridas considerações e conclusões necessárias para que algumas conjecturas sejam feitas de modo satisfatório e assim sendo, possamos fazer uma boa argumentação do que vamos propor como método de resolução das inequações-produto e inequações-quociente.

4.1 Sugestão (passo a passo)

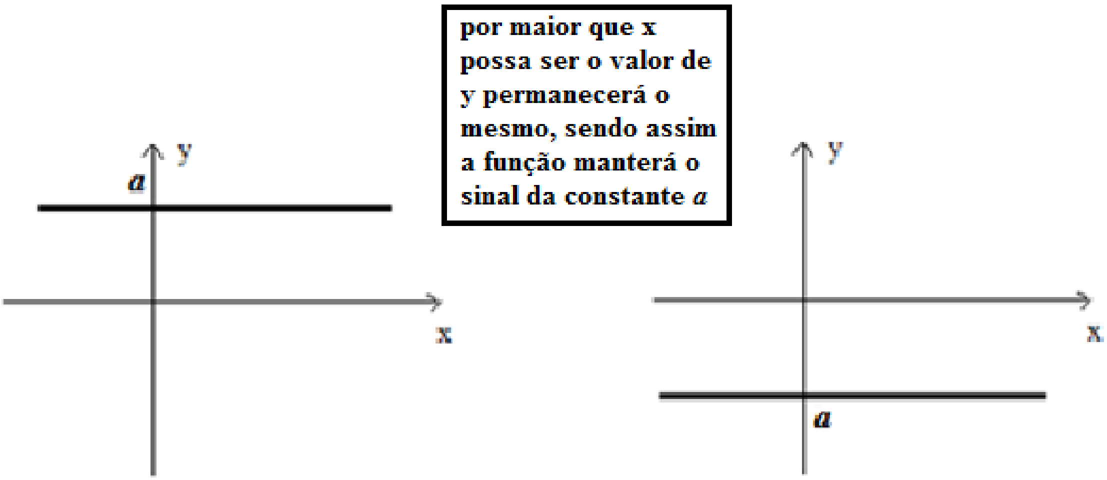
A seguir, faço um passo a passo, que vão proporcionar a realização de algumas conjecturas necessárias para que o aluno tenha compreensão do que está fazendo, e assim possa usufruir dessa resolução mais rápida.

- PRIMEIRO PASSO: Recordar algumas conclusões sobre funções, como: o zero da função, o que significa dizer que em determinado intervalo ou valor a função é positiva ou negativa e o que significa que em determinado intervalo a função é crescente, decrescente ou constante. Para essa revisão ser rápida e eficiente, acredito que uma boa estratégia seria o professor apresentar à turma o gráfico de uma função qualquer, porém é interessante que essa função seja rica em intervalos positivos e negativos, zeros da função e etc, para que essa revisão possa ser bem explorada (lembrar que esses conteúdos já foram estudados, inclusive em um espaço de tempo não muito distante, e que por isso, provavelmente faz parte da memória recente desse aluno, o que com certeza facilita muito). A seguir, deixo uma sugestão de gráfico e de perguntas:

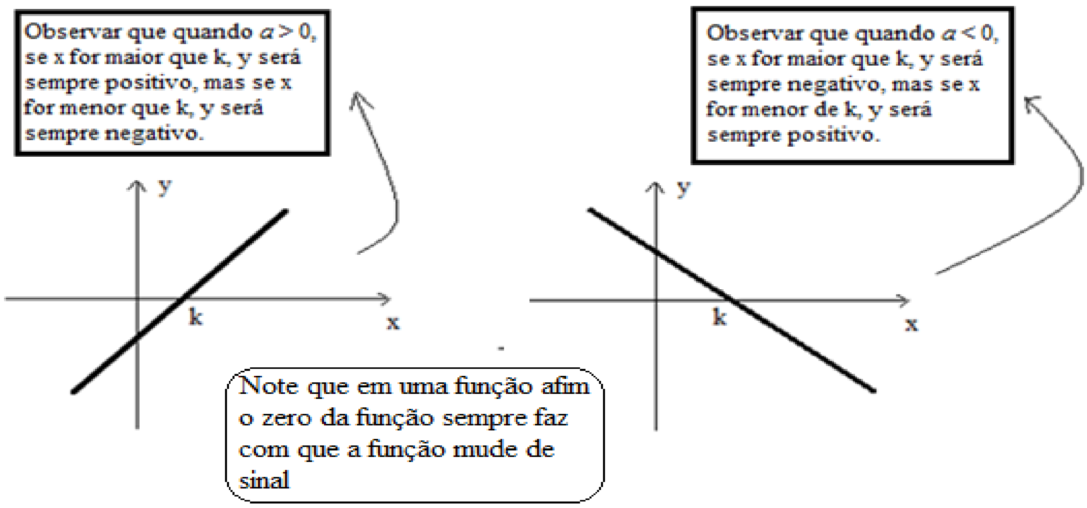


1. Esse gráfico pode representar uma função? Em que domínio?
2. Qual é o conjunto imagem dessa função?
3. Quais são os zeros dessa função?
4. Quais os intervalos nos quais essa função é positiva?
5. Quais os intervalos nos quais essa função é crescente?
6. Quais os intervalos nos quais essa função é constante?
7. Quais os intervalos nos quais essa função é negativa?
8. Quais os intervalos nos quais essa função é decrescente?

- SEGUNDO PASSO: Devemos lembrar ao aluno que funções constantes $f(x) = a$, com exceção do caso $a = 0$, não possuem zero da função e terá sempre o mesmo sinal, ou seja, se $a > 0$, então $f(x) > 0$, mas se $a < 0$, então $f(x) < 0$; nesse momento é bom lembrar ao aluno que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas intersectando o eixo das ordenadas em $y = a$; em outras palavras, devemos frisar para o aluno que em uma função constante onde $a \neq 0$ se a for positivo, a função será sempre positiva, e se a for negativo, a função será sempre negativa; salientando portanto que mesmo que o valor de x fique muito grande essa função manterá o sinal de a.

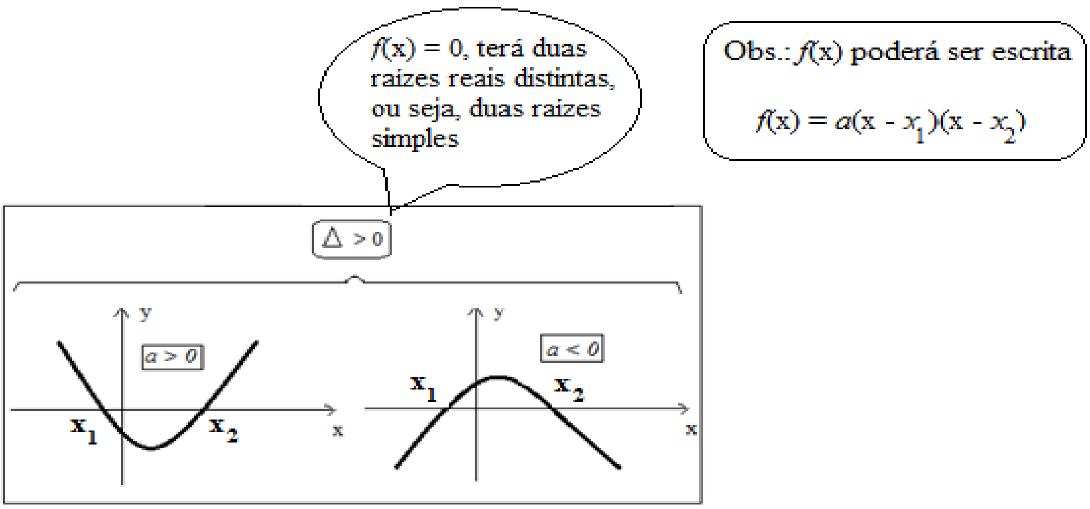


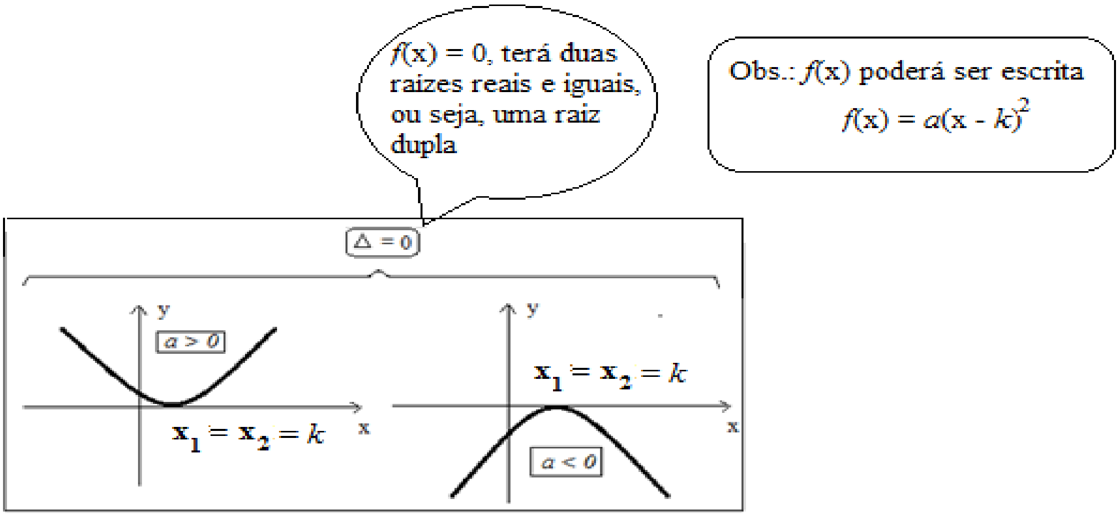
- TERCEIRO PASSO: Devemos lembrar ao aluno que funções polinomiais do primeiro grau, possuem sempre apenas um zero da função e que seu gráfico sempre será uma reta inclinada (se $a > 0$, a reta será crescente, e se a < 0, a reta será decrescente, sendo a o coeficiente angular da reta, também chamado taxa de variação. É importante ressaltar que nesse momento estamos recordando os aspetos de uma função afim que nos interessa para a resolução de inequações-produto e inequações-quociente, mas que o assunto, função afim, não fica resumido a isso), portanto fica fácil compreender, pelo tipo de gráfico, que o zero da função é o valor de x que faz com que a função mude de sinal.

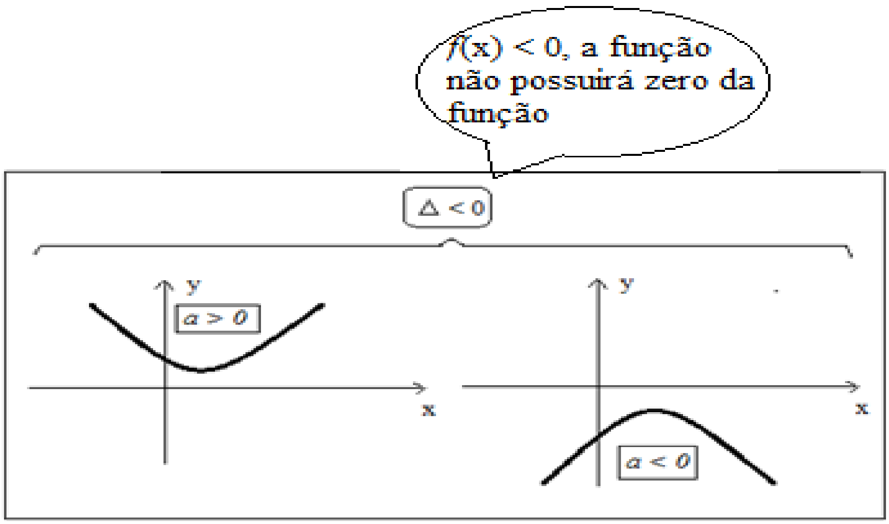


> **Observar que quando $a > 0$, se x fica extremamente grande a função será sempre poistiva, pois os pontos dessa reta terão ordenadas cada vez maiores, porém quando $a < 0$, se x fica extremamente grande a função será sempre negativa, pois os pontos dessa reta terão ordenadas cada vez menores.**

- QUARTO PASSO: Devemos lembrar ao aluno (mais uma vez, devo ressaltar que nesse momento serão abordados apenas os aspectos ue nos interessam para resolução de inequações, mas que o assunto função quadrática não deve se resumir a apenas isso) que funções polinomiais do segundo grau, sempre possuem gráfico no formato de parábolas, porém podem possuir ou não zero(s) da função (caso o discriminante ($|Delta$) seja menor, maior ou igual a zero), lembrar também que numa função quadrática escrita da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a) determina a concavidade da parábola e que $f(x) = ax^2 + bx + c$ é equivalente a $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, (onde x_1 e x_2, quando reais, são os zeros da função). Sendo assim temos:







Observar então que em todos os seis casos, se x assume valores extremamente grandes a função terá o mesmo sinal de a (observar os gráficos), ou seja, que para valores de x extremamente grandes a função será positiva se $a > 0$ e será negativa se $a < 0$. Devemos observar também que quando:

- ($\Delta < 0$) a função sempre terá o mesmo sinal de a.
- ($\Delta > 0$) a função muda de sinal na vizinhança dos zeros da função.
- ($\Delta = 0$) a função não muda de sinal na vizinhança do zero da função.

- QUINTO PASSO: Recordar que quando resolvemos a^b , com a real e b natural, temos que o resultado só será igual a zero quando $a = 0$, que será sempre positivo quando b for par, e que quando b for ímpar, o sinal de a^b será igual ao sinal de a. Logo, que por conta disso a resolução de inequações do tipo $(x-k)^n > 0$, $(x-k)^n < 0$, $(x-k)^n \geq 0$ e $(x-k)^n \leq 0$, pode ser feita com essas considerações (importante resolver com os alunos alguns exemplos, geralmente ficam emplogados quando percebem que teriam como dar a solução, sem cálculo algum, as inequações $(x-3)^2 > 0$, $(x-3)^2 < 0$, $(x-5)^2 \leq 0$, ou a equação $(x-1)^2 = 0$, sem que seja preciso realizar produtos notáveis). Devemos mostrar também ao aluno que como $f(x) = a(x-k)$ é uma função afim, cujo único zero da função é o número k, que apesar de $f(x) = a(x-k)^n$, não ser uma função afim, também é uma função, cujo único zero da função é k (lembrar ao aluno que $a(x-k)^n = a\underbrace{(x-k)(x-k)\cdot\ldots\cdot(x-k)}_{n\text{-vezes}}$. E que, assim sendo, podemos afirmar que:

- se n for par, $f(x) = a(x-k)^n$, será igual a zero apenas se $x = k$, com x diferente do zero da função, $f(x)$ sempre possuirá o sinal de a, ou seja, que o zero da função k faz com que a vizinhança de k, exceto k possua o mesmo sinal.
  (O termo "vizinhança" aqui utilizado, apesar de se referir ao mesmo visto no cálculo, deverá ser utilizado apenas como um idéia de proximidade, visto que tais conceitos aqui não cabem, mas que por outro lado, introduz a idéia de que existe uma vizinhança não mensurável a esquerda e a direita de k).
- se n for ímpar, $f(x) = a(x-k)^n$, será igual a zero apenas se $x = k$, possuirá sinal contrário de a se, e somente se, $x < k$ e possuirá o mesmo sinal de a se, e somente se $x > k$, ou seja, o comportamento do sinal da função $f(x) = a(x-k)^n$ será idêntico ao comportamento do sinal da função afim $f(x) = a(x-k)$, e assim sendo, o zero da função k, faz com que a vizinhança de k, exceto k, possua sinais contrários.

- SEXTO PASSO: Lembrar que

$$f(x) = a(x-k)^n = a\underbrace{(x-k)(x-k)\cdot\ldots\cdot(x-k)}_{\text{com } n \text{ elementos}},$$

portanto, sendo k um número real, temos que n representa a quantidade de zeros reais da função $f(x) = a(x-k)^n$, e n será denominada, a multiplicidade da raiz k. Daí podemos concluir que:

  - sendo n um número par, a vizinhança de k possuirá o mesmo sinal.
  - sendo n um número ímpar, a vizinhança de k possuirá sinais contrários.

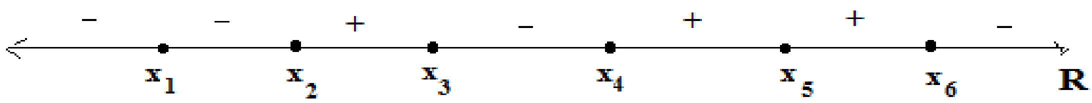
Com isso podemos concluir, analisando em conjuntamente as conclusões mencionadas na revisão acima, o seguinte:

1. Numa função polinomial de grau g, onde $0 \leq g \leq 2$, quando x é extremamente grande, a função terá o sinal do coeficiente de maior grau da função, e só sofrerá alteração quando os valores de x alcançarem o maior zero real dessa função (lembrar ao aluno que o zero da função anula a função, portanto esse zero da função altera o valor da função, mesmo que no em torno desse zero da função os sinais sejam iguais); chamar a atenção do aluno que isso não se aplica para a função $f(x) = 0$, inclusive cabe salientar a esse aluno que essa função não possui grau zero.

   Obs.: No ensino médio não está prevista a resolução de inequações envolvendo funções polinomiais com grau maior que 2, porém aparecendo alguma, teremos que fatorar esse polinômio em polinômios de grau 1 e/ou 2. Apenas devo salientar que fatorar um polinômio, nem sempre é uma tarefa simples e muitas vezes são necessários conhecimentos mais avançados, o que não é o foco nesse momento, mas mesmo assim creio que, em momento posterior, vale salientar algumas fatorações simples.

2. Numa função polinomial de grau n, um zero real da função com multiplicidade ímpar, muda o sinal da função (valores muito próximos desse zero da função vindos pela esquerda ou pela direita, possuem sinais diferentes), mas um zero real da função com multiplicidade par não muda o sinal da função, (valores muito próximos desse zero da função vindos pela esquerda ou pela direita, possuem o mesmo sinal) a não ser no próprio zero da função, que é nulo.

   Por exemplo: Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6, zeros reais de uma determinada função f, marcados na reta real abaixo. Obervar que x_2, x_3, x_4 e x_6, possuem multiplicidade ímpar, enquanto que x_1 e x_5, possuem multiplicidade par.



Essas duas conclusões bastam para que possamos propor um outro método para resolução das inequações polinomiais que tanto aparecem no aprendizado da álgebra do ensino médio, que são inequações que propõem o produto, a divisão ou ambos de polinômios cujos graus 0; 1 e 2.

- SÉTIMO E ÚLTIMO PASSO: Resolver algumas inequações-produto com os alunos do seguinte modo:

  1. Esclarecer ao aluno que aquele produto apresentado significa uma função, e que devemos na solução ter os valores de x que fazem com que aquela função tenha tal comportamento (menor que zero, maior que zero, menor ou igual a zero, ou, maior ou igual a zero).
  2. Calcular todos os valores reais que anulam cada fator (importante que trabalhemos primeiro apenas inequações-produto) e observar quantas vezes cada valor ocorreu, para que possamos concluir a paridade da multiplicidade de cada raiz real, o que é crucial para a resolução da inequação, como visto em (2) do sexto passo.
  3. Marcar numa reta real esses valores (que são os zeros reais da função).
  4. Usando a conclusão 1 (um) do sexto passo, inserir o sinal do intervalo da extremidade direita da reta real, tal sinal será obtido fazendo-se o produto entre os sinais dos coeficientes líderes de cada fator.
  5. Usando a conclusão (2) do sexto passo, inserir (da direita para a esquerda) os sinais que a função admite nos intervalos delimitados pelos zeros da função que foram marcados.
  6. Observar que quando a inequação usa as desigualdades (menor ou igual a zero, ou, maior ou igual a zero), queremos também os valores que anulam a função (por conta disso os zeros da função pertencem à solução da inequação), porém se a inequação usa as desigualdades (menor que zero, ou, maior que zero) os zeros da função não fazem parte da solução da inequação; na prática marcamos uma bolinha fechada para indicar que o zero da função pertence à solução da inequação quando os sinais são ($\leq$ ou $\geq$), e marcamos uma bolinha aberta para indicar que o zero da função não pertence à solução da inequação quando os sinais são ($<$ ou $>$).
  7. Marcamos o(s) intervalo(s) que correspondem ao sinal da desigualdade presente na inequação.

Após resolver alguns exemplos de inequações produto, salientar ao aluno que não existe diferença entre resolver a inequação $f(x) \cdot g(x) < 0$ e a inequação $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, como também não existe diferença entre resolver a inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ e a inequação $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, visto que a regra de sinais que rege a multiplicação é a mesma que rege a divisão. Porém que devemos ter cuidado quando as desigualdades são do tipo ($\leq$ ou $\geq$), pois não devemos esquecer que o denominador de uma fração tem que ser diferente de zero, e portanto, que os valores que anulam o denominador (os zeros da função que compõem esse denominador), não podem constar na solução da inequação, ou seja, as inequações $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ e $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, terão sempre $g(x) \neq 0$, de resto suas resoluções serão, respectivamente, idênticas a $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ e $f(x) \cdot g(x) \geq 0$.

5 Aplicação do método de resolução de inequações

Venho aplicando ao longo desses últimos dois anos, esse método para resolução de inequações, e tenho tido uma avaliação muito positiva. A seguir, alguns depoimentos de alunos da terceira série do ensino médio do IFRJ (Campus Arraial do Cabo), que aprenderam a resolver equações polinomiais pelo método utilizado nos livros didáticos na primeira série do ensino médio (e vieram utilizando esse mesmo método de resolução durante todo o ensino médio, quando deparavam-se com tais inequações). Por se tratar de uma turma pequena (terceira série do curso técnico de informática, onde muitos já prestaram vestibular e passaram, e também por ser o mês de janeiro, no IFRJ, tivemos aula em janeiro de 2016, calendário de reposição de aulas por conta da greve), havia na turma apenas sete alunos.

Para recolher tais depoimentos, fiz uma revisão de como aprenderam, na primeira série do ensino médio, resolver uma inequação-produto e uma inequação-quociente. Após essa revisão cada aluno recebeu uma folha contendo quatro inequações. As inequações foram as seguintes:

- $(x+2)(x^2-9) \geq 0$
- $\dfrac{4-x}{x^2+3x-4} \leq 0$
- $\dfrac{(x-3)(x^2+1)(-x^2+3x)}{-x^2} > 0$
- $\dfrac{(-x^2+4x-4)(x-2)}{(x-1)(x^2-2x+3)} \geq 0$

O tempo médio para essa tarefa foi de 20 minutos. Depois recolhi a tarefa e a seguir apresentei o método de resolução proposto nessa dissertação, seguindo o passo a passo mencionado nesse trabalho. Após apresentar o método, distribuì uma folha contendo as mesmas quatro inequações, porém fora de ordem, o tempo médio para a tarefa passou a ser de 8 minutos. Na correção observei que na primeira tarefa (onde fizeram pelo método vigente nos livros didáticos) apenas quatro alunos acertaram as quatro inequações, na segunda tarefa (onde fizeram pelo método proposto nesse trabalho) esse número subiu para seis. Depois propus que escolhessem o método e resolvessem duas inequações ($(x-2)^2(3-x)^3(4-x)^4 \leq 0$ e $\frac{(x-3)(2-x)(x^2-3x-4)}{-x^2\cdot(x^2-4)(x^3-3x)(x-2)} \geq 0$). Cem por cento da turma preferiu o método proposto por essa dissertação. Pedi então, que, se preferissem anonimamente, tecessem comentários sobre o método proposto. Copio abaixo alguns desses comentários.

"Eu achei o método diferente do tradicional, muito mais prático, onde os cálculos foram simplificados, diminuindo a possibilidade de erros."

"Eu achei que o novo método é muito interessante e muito mais simples. Com certeza pode ajudar e facilitar a vido dos estudantes, principalmente os que tem dificuldades de aprendizado."

"Considero o método proposto mais prático, e bem elaborado, uma vez que segue métodos de comprovação plausíveis, dessa forma obtendo resultados satisfatórios."

"Achei útil, visto que o método original se mostra mais longo e rebuscado, apresentando dificuldades para a resolução. O método novo aumenta as chances de acerto, dada a maior praticidade de sua aplicação."

"Achei o método muito interessante e útil principalmente para estudantes que, para fazer uma prova de vestibular por exemplo, precisam de tempo."

6 Considerações finais

Como dito antes, esta monografia, visa o professor que atua no ensino básico médio e tem como objetivo principal apresentar um método para resolução de inequações, com ênfase nas inequações-produto e inequações-quociente, que além de diminuir o tempo de resolução e demandar menos espaço físico para a mesma, acrescenta informações relevantes do comportamento do estudo de funções polinomiais, diminuindo a repetição mecânica e ampliando o conhecimento do aluno do ensino médio, sem com isso apresentar uma dificuldade maior para o aprendizado do tópico e consequentemente da matemática. Durante alguns anos, apresento aos alunos das turmas em que leciono/lecionei esse método (após a apresentação do método vigente nos livros didáticos, pois sei que a grande maioria dos meus alunos prestarão prova para concursos, principalmente vestibular, e tal método não seria aceito por ser desconhecido), obtendo sempre uma avaliação muito positiva, até hoje em um universo de pelo menos 600 alunos, apenas 2 alunos, disseram preferir o método anterior, inclusive na maioria das vezes, me foi relatado que quando se deparassem com uma prova discursiva, fariam um rascunho com o método aqui proposto, para confirmarem o resultado obtido no método tradicional.

Referências Bibliográficas

[1] Hefez, Abramo; Villela, Maria Lúcia Torres. Polinômios e Equações Algébricas (coleção PROFMAT), Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[2] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio volume 3 6^aed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] Leithold, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica volume 3, São Paulo, Editora Haper & Row do Brasil, 1982.

[4] Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar,volume 1: Conjuntos Funções 3^aed.- São Paulo, Atual 1980.

[5] Machado, Antonio dos Santos. Matemática Temas e Metas volume 1: Conujntos Numéricos e Funções, 2^a edição, São Paulo, Atual 1988.

[6] Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio, 3^a edição, Editora Saraiva, São Paulo, 2003.

[7] Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto. Matemática Uma nova abordagem volume 1 versão trigonometria,São Paulo, FTD 2009.

[8] Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto, Giovanni Jr, José Ruy. Matemática volume único 3^a edição, São Paulo, FTD.

[9] Dante, Luiz Roberto. Matemática :contexto e aplicações, São Paulo ,Ática, 2010.