UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOBRE O USO DAS SÉRIES NA MATEMÁTICA

VINÍCIUS NUNES SOUZA

Rio de Janeiro
2021

VINÍCIUS NUNES SOUZA

SOBRE O USO DAS SÉRIES NA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro
2021

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

Souza, Vinícius Nunes
SS729 Sobre o uso das séries na matemática / Vinícius Nunes Souza. -- Rio de Janeiro, 2021.
49 f.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

1. Séries. 2. Convergência. 3. Divergência. 4. Taylor. 5. Fourier. I. Busse, Ronaldo da Silva, orient. II. Título.

VINÍCIUS NUNES SOUZA

SOBRE O USO DAS SÉRIES NA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 05 de março de 2021.

Ronaldo Busse

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse (Orientador) .... CCET/UNIRIO

Gladson O. Antunes

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes .... CCET/UNIRIO

Orlando Santos Pereira

Prof. Dr. Orlando dos Santos Pereira .... UFRRJ

Rio de Janeiro

2021

Este trabalho é dedicado à minha família e a todos que colaboraram direta ou indiretamente para sua concretização.

Resumo

As séries desempenham relevante papel na matemática. Neste trabalho, estudam-se algumas ferramentas através das quais se pode analisar seu comportamento quanto à convergência ou divergência. Em seguida, abordam-se as séries de potência, cuja importância se faz destacar na representação de funções que não possuem primitivas elementares. São estudadas ainda as séries de Taylor e de Maclaurin, empregando-as no cômputo de somatórios e até mesmo no cálculo de limites. Prosseguindo, são apresentadas algumas interessantes aplicações das séries, como, por exemplo, uma aproximação para o número pi. Além disso, é apresentada a Série de Fourier, bem como algumas de suas aplicações de destaque. O trabalho é finalizado com a exposição da importante função de Weierstrass.

Palavras-chave: Séries, convergência, divergência, Taylor, Fourier, Weierstrass.

Sumário

INTRODUÇÃO 1

1 SÉRIES NUMÉRICAS 2

2 SÉRIES DE POTÊNCIAS 18

3 ALGUMAS APLICAÇÕES INTERESSANTES DE SÉRIES 33

4 OUTRAS SÉRIES IMPORTANTES 39

CONSIDERAÇÕES FINAIS 48

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 49

Lista de Figuras

4.1 Fluxo de calor na haste 41
4.2 Esquema de corda vibrante 43
4.3 Função de Weierstrass 47

Fonte das Figuras

- Figura 4.1: O autor.
- Figura 4.2: O autor.
- Figura 4.3: Disponível em: https://www.desmos.com/calculator/bmafitbg0q?lang=pt-BR. Acesso em: 23 jan. 2021.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar ao leitor a importância das séries na Matemática bem como familiarizá-lo com as diversas ferramentas úteis à resolução de problemas envolvendo somas infinitas. Cabe destacar que este é um tema que há muito tempo fascina os matemáticos, especialmente por seu caráter anti-intuitivo, a exemplo do comportamento apresentado pela série harmônica.

No capítulo 1, são expostos conceitos elementares como a definição de série e o significado de convergência e divergência. Além disso, são estudadas maneiras de se compreender o comportamento de uma série. Através dos diversos testes de convergência, como por exemplo, o teste da razão, tornamo-nos capazes de determinar se a soma de uma série caminha para um número ou dispara ao infinito. O capítulo segue com diversos exemplos enriquecedores e encerra-se com a exposição de um interessante grupo de séries: as séries telescópicas.

No capítulo 2, torna-se natural abordar as séries de potências. Estas ganham centralidade ao passo que permitem representar determinadas funções. Isso é valioso pois possibilita avaliar antiderivadas não-elementares. Nesse sentido, lança-se mão do Polinômio de Taylor que, como veremos, pode ser integrado de forma semelhante a um polinômio ordinário. Em seguida, manipulam-se algumas representações conhecidas a fim de encontrarmos representações para outras funções, bem como computam-se somas através de escolhas apropriadas para x em algumas séries pertinentes.

O capítulo 3 revela algumas interessantes aplicações das séries. Primeiramente, é feito um estudo acerca da validade ou não da igualdade $0,9999... = 1$. Em seguida, busca-se através das séries de potências, uma aproximação para o número π. O capítulo é finalizado realizando-se um paralelo entre a somação por partes e a integração por partes.

Por fim, no capítulo 4, são apresentadas as séries de Fourier, que viabilizam a modelagem de importantes fenômenos físicos, como a condução de calor e a propagação de ondas. Além disso, busca-se responder a seguinte pergunta: *Existem funções contínuas que não são deriváveis?*. O ilustre matemático Karl Weierstrass, na segunda metade do século XIX, elucidou essa questão.

1 SÉRIES NUMÉRICAS

Neste capítulo, serão apresentadas definições de conceitos fundamentais sobre sequências e séries infinitas. A compreensão desses conteúdos faz-se relevante ao bom entendimento dos capítulos subsequentes.

Definição 1. *Uma sequência numérica pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 de segundo termo e, em geral, a_n é o n-ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Definição 2. *Dizemos que uma sequência a_n tem limite L e escrevemos:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ ou } a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazermos n suficientemente grande. Se $lim_{n\to\infty} a_n$ existir, a sequência é dita convergente. Caso contrário, a sequência é dita divergente.

Definição 3. *Seja a_n uma sequência numérica, define-se por série infinita, a soma:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ou seja, uma série infinita é dada pela soma dos n elementos de uma sequência a_n, quando $n \to \infty$.

Definição 4. *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...$ *, denote por* s_n *sua n-ésima soma parcial:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ *for convergente e* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *existir como um número real, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita convergente, e escrevemos:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = s \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado de soma da série. Caso contrário a série é dita divergente.

Exemplo 1. *Consideremos a série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n + ...$$

Note que, quando n aumenta, o valor das somas parciais da série fica muito grande, levando-nos a crer não ser possível computar a soma desta série. Por exemplo:

- *Para n=1, temos* s_n*=2*
- *Para n=5, temos* s_n*=2+ 4+ 6+ 8+ 10 = 30*
- *Para n=10, temos* s_n*= 2+ 4+ ...+ 20 = 110*

Seja k>0. Basta considerar n natural de modo que n>$\frac{k}{2}$*. Nesse caso,* $s_n > 2n > k$ *e, portanto,* s_n *tende a infinito.*

Exemplo 2. *Analisemos agora a série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} + ...$$

Perceba inicialmente que a série tem um formato familiar. Sim, trata-se de uma progressão geométrica infinita decrescente. Com isso, sabemos ser possível computar sua soma através da fórmula $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ *, onde* a_1 *é o primeiro termo da progressão e r, sua razão. Assim, temos:*

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Dessa maneira, evidencia-se que $S_n = \frac{3}{2}$ *e, portanto, a série converge. Em breve esse tipo de série (série geométrica), será vista com maiores detalhes.*

Ainda que em um primeiro momento pareça fácil ou intuitivo determinar se uma série converge ou diverge, isso pode ser bem complicado. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 3. *Mostre que a série harmônica diverge.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}...$$

Considere as seguintes somas parciais:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1 + \frac{2}{2}$

$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = 1 + \frac{3}{2}$

$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16}) = 1 + \frac{4}{2}$

De modo análogo, $s_{32} > 1 + \frac{1}{5}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, *e, em geral,* $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. *Isso mostra que* $s_{2^n} \to \infty$ *quando* $n \to \infty$ *e, com isso,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Assim, percebe-se que seria extremamente trabalhoso pensar em uma estratégia para analisar cada série quanto à sua convergência ou divergência. Por isso, foram desenvolvidas ferramentas para otimizar essa análise. Em seguida, tais recursos serão apresentados. Os teoremas não serão demonstrados por não ser objetivo deste trabalho. Para maiores detalhes, consultar Guidorizzi (2002).

Teorema 1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, então* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Teste para Divergência. Se $\lim_{n \to \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teorema 2. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *forem séries convergentes, então também o serão as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *(onde c é uma constante),* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$, *e*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

O Teste da Integral. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e somente se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

1. Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Os Testes de Comparação. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Testes de Comparação no Limite. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Teste da Série Alternada. Se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \ldots$, em que $b_n > 0$, satisfizer

1. $b_{n+1} \leq b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

então, a série é convergente.

Definição 5. *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita absolutamente convergente se a série de valores absolutos* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *for convergente.*

Definição 6. *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é chamada condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.*

Teorema 3. *Se uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *for absolutamente convergente, então ela é convergente.*

Teste da Razão.

1. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente).

2. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou se $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

3. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L = 1$, o Teste da Razão não é conclusivo; isto é, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Teste da Raiz.

1. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente).

2. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ou se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

3. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Agora, serão apresentadas algumas séries fundamentais à análise de várias outras séries mais complexas.

A Série Geométrica. A série geométrica é uma velha conhecida dos estudantes. Trata-se da soma dos termos de uma progressão geométrica.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo da série é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma razão r. Consideremos inicialmente o caso em que r = 1 . Se r = 1, então s_n= a + a + a + ... + a = $an \to \pm\infty$. Com isso, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe e assim, de acordo com o teste para divergência, a série diverge. Se $r \neq 1$, temos:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

Consequentemente,

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Dessa forma:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $\dfrac{a}{1-r}$. Se $r \leq -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente e, com isso, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não existe. Assim, a série geométrica diverge naqueles casos. Resumindo, temos que a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{r-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{r-1} = \dfrac{a}{1-r}$ $|r| < 1$. Se, $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

A p-série. Outra série elementar de grande utilidade para instrumentalizar a análise de séries mais complexas é a p-série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Para utilizá-la futuramente, faz-se necessário descobrir para que valores de p a série converge e para quais a série diverge.

- Se $p < 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^p}\right) = \infty$.
- Se $p = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^p}\right) = 1$.

Em qualquer dos dois casos, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^p}\right) \neq 0$ e, assim, a série dada diverge pelo Teste da Divergência.

- Se $p > 0$, então a função $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ é claramente contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Logo:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_{x-1}^{x-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

- Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$. Dessa forma, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $\dfrac{1}{t^{p-1}} \to 0$. Portanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{se } p > 1$$

E, nesse caso, a integral converge e segue do Teste da Integral onde a série $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$. Note ainda que para p=1, a p-série se torna a série harmônica. Embora já saibamos pelo Exemplo 3 que a série é divergente, podemos reabordá-la lançando mão do Teste da Integral. Desse modo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} = \lim_{t\to\infty} ln|x|_1^t = \lim_{t\to\infty}(lnt - ln1) = \lim_{t\to\infty} lnt = \infty$$

O limite não existe como um número finito e, assim, a integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge. Portanto, pelo Teste da Integral, a série harmônica é divergente. Em suma, temos:

A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 4. *Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.*

Este é um exemplo interessante, pois carece mais de percepção que do uso de ferramentas sofisticadas. Note inicialmente que

$$b^{\ln n} = \left(e^{\ln b}\right)^{\ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln b} = n^{\ln b} = \frac{1}{n^{-\ln b}}$$

Com isso, observa-se que a série em questão é uma p-série, pois é da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Além disso, sabemos que a p-série converge se $p > 1$. Logo, os valores de b para que $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ seja convergente são tais que :

$$-\ln b > 1 \Leftrightarrow b < e^{-1} \Leftrightarrow b < \frac{1}{e}$$

Assim, deve-se ter $0 < b < \frac{1}{e}$.

Exemplo 5. *Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ é convergente ou divergente.*

Perceba que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$, *pois* $\frac{\ln 1}{1} = 0$.

A intenção aqui é aplicar o Teste da Integral. A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ *é contínua e positiva em* $[2, \infty]$, *mas é preciso verificar se a função também é decrescente em nosso intervalo de interesse.*

$$f'(x) = \frac{x^3\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4} < 0 \Leftrightarrow 1 - 3\ln x < 0 \Leftrightarrow> \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \approx 1,4$$

Desse modo, f é decrescente em $[2, \infty]$ *e o Teste da Integral é aplicável. Logo:*

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right]_1^t, \text{ então } \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right]_1^t =$$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4t^2}(2\ln t + 1) + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$ *e, dessa forma, podemos dizer que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$ *converge.*

OBSERVAÇÕES:

I) Se $u = \ln x$, $dv = x^{-3}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $v = -\dfrac{1}{2}x^{-2}$, *então*

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \int -\frac{1}{2}x^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx =$$

$$-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2} + C.$$

II) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2\ln t + 1}{4t^2}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2}{t}}{8t} = -\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} = 0$

Exemplo 6. *Encontre os valores de p para os quais a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ *é convergente.*

Primeiramente, analisemos o caso em que p=1.

Se p=1, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ *é contínua e positiva em* $[2,\infty]$. *Além disso,* $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x^2(\ln x)^2}\leq 0$ *para* $x>2$, *assim, podemos aplicar o Teste da Integral.*

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln x)]_2\,t=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln t)-\ln(\ln 2)]=\infty$$

Desse modo, para p=1, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ *diverge. Agora, analisemos o caso em que* $p\neq 1$. *Note que* $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ *é contínua e positiva em* $[2,\infty]$, *e* $f'(x)=-\dfrac{p+\ln x}{x^2(\ln x)^{p+1}}\leq 0$ *se* $x\geq e^{-p}$. *Assim, f decresce e podemos empregar o Teste da Integral. Logo:*

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^t=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right]$$

O limite existe quando $1-p\leq 0\leftrightarrow p\geq 1$. *Desse modo, a série converge para* $p\geq 1$.

Exemplo 7. *Determine se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ *é convergente ou divergente.*

Torna-se útil, nesse caso, a utilização do Teste da Comparação, sendo $a_n=\dfrac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ *e* $b_n=\dfrac{1}{n^3}$, *onde* b_n *é uma p-série com* $p>1$, *ou seja,* b_n *é convergente.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(5+2n)}{(1+n^2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^4}{(1+n^2)^2}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{(n^2)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+2}{\left(\frac{1}{n^2}+1\right)^2}=2>0$$

Com isso, como $b_n=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ *é convergente, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ *também converge.*

Exemplo 8. *Analise a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ *quanto à divergência ou convergência.*

Lembremo-nos que quando o arco é próximo de zero, o seno se aproxima do próprio arco e, portanto, espera-se que o comportamento seja o mesmo da série harmônica. Utilizaremos aqui o Teste da Comparação. Seja $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ *e* $b_n = \frac{1}{n}$, *tem-se que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries cujos termos são positivos. Assim:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 > 0$$

Dessa forma, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente (série harmônica), conclui-se que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ *também diverge.*

Exemplo 9. *Verifique se a série alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ *é divergente ou convergente.*

Seja $b_n = \frac{n^2}{n^3+4} > 0$ *para* $n \geq 1$. *Analisemos inicialmente o intervalo de decrescimento de* $f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}$.

$$\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right)' = \frac{(x^3+4)(2x) - x^2(3x^2)}{(x^3+4)^2} = \frac{x(2x^3+8-3x^3)}{(x^3+4)^2} = \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2} < 0 \text{ para } x > 2$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^3}} = 0$$

Sendo assim, conclui-se, pelo Teste da Série Alternada, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ *é convergente.*

Exemplo 10. *Determine se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ *é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{10^{n+1}}{(n+2)4^{2n+3}}\cdot\frac{(n+1)4^{2n+1}}{10^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{4^2}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{5}{8} < 1$$

Desse modo, conclui-se que a série é absolutamente convergente pelo teste da razão. Como todos os termos dessa série são positivos, dizer que ela é absotutamente convergente equivale a dizer que é convergente.

Exemplo 11. *Verifique se a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$ *é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.*

Usando o teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2}{n+1}\right| = 0 < 1$$

Logo, a série é absolutamente convergente.

Exemplo 12. *Mostre que a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ *é condicionalmente divergente.*

Como $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}$ *é nitidamente decrescente e* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$*, pelo Tesde da Série Alternada, tem-se que* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ *converge. Por outro lado, dado que* $\ln n < n$ *mostra que* $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ *e considerando-se que a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ *(série harmônica) é divergente, conclui-se que* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ *diverge. Dessa forma, a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ *é condicionalmente convergente.*

Exemplo 13. *Faça o estudo da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *quanto à sua convergência ou divergência.*

Utilizaremos aqui o Teste da Raiz. Assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$

Logo, pelo Teste da Raiz, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *é divergente.*

Por fim, vejamos mais uma interessante família de séries, conhecidas como Séries Telescópicas.

Séries Telescópicas. "A ideia por trás do nome é a seguinte: assim como olhando num telescópio encurtamos a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a propriedade telescópica encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma."(CAMINHA, 2011)

Este tópico raramente é abordado no ensino médio, embora sua ideia geral seja simples e perfeitamente aplicável a alunos deste etapa da educação básica. Cabe aqui um incentivo à inserção do tema nas salas de aula, dado que ele se relaciona com outros conceitos prévios, a exemplo da trigonometria e dos logaritmos, viabilizando uma revisão dos mesmos, como veremos a seguir.

Definição 7. *Seja (X_n) uma sequência, na qual $n \in \mathbb{N}$ e $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$. Aplicando-se o somatório à ΔX_k, tem-se:*

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta X_k = X_{n+1}-X_1$$

A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{n}\Delta X_k$ é denominada Série Telescópica. Observe que para uma Série Telescópica convergir, é necessário que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}X_{n+1}$ seja um número finito.

Exemplo 14. *Calcule o valor de S, onde*

$$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$$

$$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$$
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)\qquad\textit{(Decomposição em frações parciais)}$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \qquad \textit{(Série Telescópica)}$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \qquad a_n = \frac{1}{2n-1}, a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1 - 1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}(1-0)$$

$$S = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 15. *Mostre que* $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x - 2\operatorname{cotg} x$ *e determine a soma da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

Pela trigonometria básica, sabemos que:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} \Rightarrow \operatorname{cotg} 2\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{2\operatorname{tg}\theta}$$

Logo $2\operatorname{cotg} 2\theta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\theta$. *Fazendo* $\theta = \frac{1}{2}x$, *temos:*

$$2\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x - \operatorname{tg}\frac{1}{2}x \quad \textit{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x - 2\operatorname{cotg} x$$

Ao substituirmos x *por* $\dfrac{x}{2^{n-1}}$ *na identidade demonstrada, vamos obter* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n} = \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^n} - 2\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^{n-1}}$.*Desse modo, a n-ésima soma parcial de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ *é:*

$$s_n = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2} + \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{4} + \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{8}}{8} + \cdots + \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}}{2^n}$$

$$s_n = \left[\frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{2} - \operatorname{cotg} x\right] + \left[\frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{4}}{4} - \frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{2}\right] + \left[\frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{8}}{8} - \frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{4}}{4}\right] + \cdots +$$

$$\left[\frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n}}{2^n} - \frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2^{n-1}}}{2}^{n-1}\right]$$

$s_n = -\operatorname{cotg} x + \left[\dfrac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n}}{2^n}\right]$ *(Soma Telescópica)*

Agora, tem-se $\dfrac{\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^n}}{2^n} = \dfrac{\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}} = \dfrac{\cos\dfrac{x}{2^n}}{x} \cdot \dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}} = \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}$ *pois, como* $n \to \infty$, *tem-se que* $\dfrac{x}{2^n} \to 0$ *onde* $x \neq 0$. *Portanto, se* $x \neq 0$ *e* $x \neq k\pi$, *onde* k *é um interno qualquer, temos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\operatorname{cotg} n + \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{x}{2^n}\right) = -\operatorname{cotg} x + \frac{1}{x}$$

Além disso, se $x = 0$, *todos os termos da série serão iguais a 0 e, consequentemente, sua soma será 0.*

Antes de finalizarmos o capítulo, vejamos mais um exemplo desta poderosa ferramenta:

Exemplo 16. *Calcule a soma da série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Através das propriedades dos logarítimos podemos reescrever a expressão $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ *assim:*

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \ln\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \ln\left[(n+1)(n-1)\right] - \ln n^2 =$$

$$\ln(n+1) - \ln(n-1) - 2\ln n = \ln(n-1) - \ln n - \ln n + \ln(n+1) =$$

$$\ln\frac{n-1}{n} - \left[\ln n - \ln(n+1)\right] = \ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}$$

Seja $s_k = \displaystyle\sum_{n-2}^{k} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n-2}^{k} \left(\ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}\right)$ *para* $k \geq 2$. *Logo*

$$s_k = \left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3}\right) + \left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\ln\frac{k-1}{k} - \ln\frac{k}{k+1}\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{k}{k+1}.$$

Desse modo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{k}{k+1}\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln 1 = \ln 1 - \ln 2 - \ln 1 =$$

$$-\ln 2$$

Essas séries não exigem a utilização dos testes vistos anteriormente, pois podem ser analisadas diretamente através de suas somas parciais.

2 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Neste capítulo serão apresentadas as séries de potências. Através delas é possível descrever importantes funções que estão presentes nas ciências naturais. Como exemplo, podemos citar as funções de Bessel, que descrevem vários fenômenos físicos como ondas eletromagnéticas, condução de calor e processamento de sinais.

Definição 8. *Série de Potências: Seja a_n, $n \geq 0$ uma sequência numérica dada e seja x_0 um real dado. A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

é denominada série de potências, com coeficientes a_n em torno de x_0 (ou centrada em $x = 0$). Se $x_0 = 0$, temos a série de potências em torno de zero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

Note-se que a cada valor estabelecido para x, é obtida uma série de constantes que se pode testar quanto à convergência ou divergência. Assim, dado uma série de potências, torna-se natural que se questione para quais valores de x a série converge e para quais diverge.

Teorema 4. *Raio de convergência: Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$. Existem apenas três possibilidades:*

I) Ou a série converge apenas quando $x = a$;
II) Ou a série converge para todo x;
III) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$. Nos extremos $x = a - R$ e $x = a + R$, a série poderá convergir ou não.

O número R apresentado no item III é denominado raio de convergência. Ademais, convenciona-se que $R = 0$ *no item I e* $R = \infty$ *no caso II. Cabe destacar ainda que o intervalo contendo todos os valores de* x *para os quais a série converge é chamado de intervalo de convergência.*

A demonstração do Teorema não foi apresentada por não constituir objetivo deste trabalho, porém pode ser encontrada em Guidorizzi (2002).

Exemplo 17. *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Se $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ *então:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = |x|$$

Logo, pelo teste da razão, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ *converge quando* $|x| < 1$. *Desse modo, o raio de convergência é igual a 1 (R = 1).*

Agora verifiquemos o comportamento da série quando $x = \pm 1$. *Quando x = 1, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}}$ *diverge pois é uma p-série com* $p = \frac{1}{2}$. *Por outro lado, se x = -1, obtemos a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n}{\sqrt{n}}$, *que converge pelo teste da serie alternada. Assim conclui-se que o intervalos de convergência é* $I = [-1, 1)$.

Exemplo 18. *Determine o raio e o intervalo de convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$.

Se $a_n = n!(2x-1)^n$, *então:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!(2x-1)^{x+1}}{n!(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)(2x-1) \to \infty \text{ para todo } x \neq \frac{1}{2}.$$

Como a série diverge para todo $x \pm \frac{1}{2}$, *R = 0 e o intervalo de convergência é* $I = \frac{1}{2}$.

Exemplo 19. *A soma da série de potências deste exemplo é denominada Função de Bessel, em reverência ao matemático, físico e astrônomo alemão Fredrich Wilbelm Bessel (1784-1846). O surgimento dessas funções se deu quando Bessel resolveu a equação de Kepler para a descrição do movimento planetário. Depois disso, as funções de Bessel receberam variadas aplicações na física e na engenharia.*

Seja $J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)}.\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$ *a função de Bessel de 1ª espécie e ordem m encontremos o raio e o inervalo de convergência da função de Bessel de ordem 0 que será dada por* $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

Seja $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$, *então:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n.x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n.x^{2n}}\right| \left|\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2 n!^2}\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}\right| =$$

$\frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1$ *para todo x. Logo, o domínio da fução de Bessel é* $(-\infty, +\infty)$ *e*

$R = \infty$.

Exemplo 20. *Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$

Sendo $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$, *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^k (kn)!}{(n!)^k [k(n+1)]!} |x| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)...(kn+2)(kn+1)} |x| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)}{(kn+1)}.\frac{(n+1)}{(kn+2)}...\frac{(n+1)}{(kn+k)}\right] |x| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)}{(kn+1)}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)}{(kn+2)}\right]...\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)}{(kn+k)}\right]|x| =$$

$\left(\frac{1}{k}\right)^k |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < k^k$ *para que a série convirja.*

- **Funções como série de potências**

As séries de potências são especialmente úteis pois, através delas, é possível obter expressões para representar determinadas funções. Esse recurso torna-se extremamente valioso quando se deseja integrar fuções que não possuem primitivas elementares, resolver equações diferenciais e ainda, aproximar funções por polinômio.

Desse modo, pode-se dizer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = f(x)$, ou seja, a soma da série é uma função tendo por domínio o conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge.

Exemplo 21. *Tomemos inicialmente a série* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$*. Do capítulo anterior sabemos que se trata de uma série geométrica e que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

Consideremos agora que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \qquad |x| < 1$$

Desse modo nota-se que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *pode ser representada por uma série de potências e que o domínio de* $f(x)$ *através dessa representação é* $|x| < 1$*.*

Exemplo 22. *Encontre uma representação em série de potências para a função* $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ *e determine o intervalo de conevrgência.*

O problema em tela pode ser abordado de algumas diferentes maneiras. Pela primeira abordagem temos que

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{-(1-x)+2}{1-x} = -1 + 2\left(\frac{1}{1-x}\right) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

A série converge quando $|x| < 1$ e, assim, R = 1 e I = (-1,1). De outro modo, poderíamos fazer:

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = (1+x)\left(\frac{1}{1-x}\right) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Note ainda que a função pode ser manipulada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} = (1+x)\left(\frac{1}{1-x}\right) = (1+x)(1+x+x^2+x^3+\dots) =$$

$$(1+x+x^2+x^3+\dots) + (x+x^2+x^3+x^4+\dots) = 1+2x+2x^2+2x^3+\dots = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Embora esta última manipulação seja bastante semelhante à primeira, utilizou-se, neste último modo, uma notação mais leve e familiar.

Através desses exemplos podemos perceber que, por vezes, há mais de uma forma de se chegar a série que representa uma função. Desse modo, caso um caminho apresente-se demasiadamente trabalhoso, pode ser interessante ponderar outras possibilidades.

- **Derivação e Integração de Séries de Potências**

Teorema 5. *Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e neste valem:

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)dx = c + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = c + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

A demonstração do teorema não será apresentada, mas pode ser encontrada em Guidorizzi (2002).

Destaca-se que, embora o raio de convergência não se altere quando da derivação ou integração de uma série de potências, isso não significa que o intervalo de convergência mantenha-se inalterado.

Exemplo 23. *Determine o raio de convergência e encontre uma representação em série de potêncas para a função $f(x) = \ln(5-x)$.*

Inicialmente, dada a série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^5$*, vê-se que seu raio de convergência é dado por*

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}}.\frac{5^n}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{5}\right|$. *A série convege se* $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$. *Desse modo,* $|x| < 5$ *e* $R = 5$.

Assim $f(x) = \ln(5-x) = -\int\frac{dx}{5-x} = -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1-\frac{x}{5}} = -\frac{1}{5}\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n\right]dx = c - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^n(n+1)} = c - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n5^n}$.

Fazendo $x = 0$, obtemos $c = \ln 5$. Além disso, pelo teste da razão tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(x+1)5^{n+1}}.\frac{n5^n}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{5}\right|$$

Logo, converge se $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$. *Com isso,* $|x| < 5$ *e* $R = 5$.

Exemplo 24. *Encontre o raio de convergência e uma representação em série de potências para a função* $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

Inicialmente perceba que $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n$ *para* $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2.$

Agora, $\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+2}}x^n.$

Por fim, $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+2}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+2}}x^{n+3}$ *para* $|x| < 2$*. Desse modo,* $R = 2$ *e* $I = (-2, 2)$*.*

Exemplo 25. *Calcule a integral indefinida* $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}dt$ *como uma série de potências e determine seu raio de convergência.*

Podemos representar a função $\dfrac{t}{1-t^8}$ *através de uma série de potências como segue:*

$$\frac{t}{1-t^8} = t.\frac{1}{1-t^8} = t\sum_{n=0}^{\infty}(t^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty}t^{8n+1}$$

Antes de avançar à integração, é necessário verificar o raio de convergência:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{t^{8(n+1)+1}}{t^{8n+1}}\right| = \left|\frac{t^{8n+9}}{t^{8n+1}}\right| = |t^8|.$$

A série converge se $|t^8| < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$*. Desse modo,* $R = 1$*.*

Agora, $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}dt = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{8n+1}\right)dt = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{8n+2}}{8n+2}$*. Além disso, pelo teste de razão temos:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{t^{8n+10}}{8n+10}.\frac{8n+2}{t^{8n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{8n+2}{8n+10}.t^8\right| = |t^8|.$$

Logo, a série converge quando $|t^8| < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$ *e, portanto* $R = 1$*.*

Exemplo 26. *Resolva a integral indefinida* $\displaystyle\int \frac{x - arctg(x)}{x^3}dx$.

Em primeiro lugar devemos procurar por uma representação em série de potências para $f(x) = tg^{-1}x$. *Nesse momento é importante lembrar que* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Além disso,*

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Assim,

$$tg^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots)dx = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Fazendo $x = 0$, *obtemos* $c = 0$. *Com isso,* $tg^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. *Logo,*

$$x - tg^{-1}x = x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

e

$$\frac{x - tg^{-1}x}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{2n+1}$$

Observe que o mais complicado foi encontrar uma representação em série de potências para a função a ser integrada. A integração, como veremos a seguir, é imediata.

$$\int \frac{x - tan^{-1}x}{x^3}dx = c + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)} = c + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{4n^2-1}$$

SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN

Teorema 6. *Se* f *tiver uma representação (expansão) em série de potências em* a, *isto é, se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R \quad [1]$$

então, seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Podemos chegar ao coeficente acima através do seguinte raciocínio: seja f uma função qualquer, que possui representação como série de potências:

$$[2] \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \ldots \qquad |x-a| < R$$

Inicialmente, note que fazendo $x = a$, obtém-se $f(a) = c_0$. Pelo Teorema 5, podemos derivar a equação [2] termo a termo. Assim,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots \qquad |x-a| < R$$

Fazendo novamente $x = a$, vem que $f'(a) = c_1$. Repetindo o processo algumas vezes, temos

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a) + \ldots \qquad |x-a| < R \text{ e } f''(a) = 2c_2$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + 3.4.5c_5(x-a)^2 \ldots \qquad |x-a| < R \text{ e } f'''(a) = 2.3.c = 3!c_3$$

Através das etapas realizadas é possível perceber um padrão. Nesse sentido, se prosseguirmos derivando e com isso fazendo $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2.3.4.\ldots.n.c_n = n!c_n$$

Finalmente, isolando c_n,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

SÉRIE DE TAYLOR. Substituindo-se c_n na expressão [1] do teorema anterior, obtemos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Assim, a expressão acima é chamada Série de Taylor da função f em a.

SÉRIE DE MACLAURIN. Para o caso específico em que a $= 0$ na série de Taylor, obtemos a série de Maclaurin. Assim:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ...$$

Exemplo 27. *Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.*

Sendo $f(x) = e^x$, tem-se que $f^{(n)}(x) = e^x$. Com isso, $f^{(n)}(x) = e^0 = 1$ qualquer que seja n. Logo, a série de Maclaurin para f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Fazendo $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Desse modo, pelo teste da razão, a série converge para todos valores de x. Assim, $R = \infty$.

É interessante observar que a partir da série de Maclaurin para $f(x) = e^x$, obtemos uma representação para e como uma soma infinita.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Exemplo 28. *Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$.*

Para encontrar uma representação, inicialmente calculamos as primeiras derivadas de $senx$ em $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = senx & f(0) = 0 \\ f'(x) = cosx & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -senx & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -cosx & f'''(0) = -1 \\ f''''(x) = senx & f''''(0) = 0 \end{array}$$

Desse modo, observa-se que as derivadas de $senx$ se repetem em um ciclo de quatro derivações. Com isso, podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Assim, obtemos $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *para todo x pois, pelo teste da razão:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+n]!}.\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0 < 1$$

Uma vez obtida a representação da série de Maclaurin para $senx$, podemos derivar de modo a obter a representação para $cosx$. Procedendo dessa forma, temos:

$$cosx = \frac{d}{dx}(senx) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Como a série de Maclaurin de senx é convergente para todo x, então a série derivada para cosx também converge para todo x. Assim,

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)} \textit{ para todo } x.$$

Apresentamos resumidamente a seguir, algumas séries de Maclaurin importantes, às quais recorreremos futuramente para resolver problemas mais complicados:

(I) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ R = 1

(II) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ R = ∞

(III) $sen\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$ R = ∞

(IV) $cos\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ R = ∞

(V) $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ R = 1

Exemplo 29. *Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x + e^{2x}$.*

Vimos anteriormente que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Substituindo-se x por $2x$ temos:*

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n.x^n}{n!}$$

Por fim,

$$f(x) = e^x + e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}x^n,\ R = \infty.$$

Exemplo 30. *Encontre a série de Maclaurin para a função $f(x) = sen^2 x$.*

Antes de recorrermos a uma das séries de Maclaurin já encontradas, cabe lembrar de uma relação trigonométrica que facilitará nossa tarefa: $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$. Assim, podemos alcançar nosso objetivos obtendo a série para $f(x) = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$.

Vimos anteriormente que $cosx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, R = \infty$. Logo,

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - cos2x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.2^{2n-1}.x^{2n}}{(2n)!}.$$

Exemplo 31. *Calcule $\int xcos(x^3)dx$ como uma série infinita.*

Assim como no exemplo anterior, podemos lançar mão da série de Maclaurin já obtida para $cosx$. Como $cosx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, temos:

$$cosx^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!} \Rightarrow xcos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!}$$

Agora podemos realizar a integração como segue:

$$\int xcos(x^3)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(2n)!}\right) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(n+2)(2n)!}, R = \infty.$$

Exemplo 32. *Calcule o limite $\lim_{x \to 0} \frac{senx - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$.*

Observe inicialmente que a substituição de x por 0 nos leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesse ponto, poderíamos aplicar L'Hospital, mas seguiremos outros caminhos.

Já encontramos a representação de $senx$ como série de Maclaurin. Substiituíndo $senx$ pela sua representação como série temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots\right)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots}{x^5}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5!}-\frac{x^2}{7!}+\frac{x^4}{9!}-\ldots\right)=\frac{1}{120}.$$

Exemplo 33. *Compute a soma da série $\frac{3}{1!}+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+\ldots$.*

À primeira vista, pode parecer complicado efetuar essa soma, mas parece promissor olhar para as parcelas e detectar um padrão.

Queremos calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. Pensando nas séries já obtidas, lembramos de $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Fazendo $x=3$ temos:

$$e^3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=e^3-1$.

Para encerrar o capítulo, vejamos um último exemplo no qual, embora não seja pedido explicitamente, a obtenção da série de Maclaurin para a função ajuda bastante na resolução.

Exemplo 34. *Mostre que $coshx\geq 1+\frac{1}{2}x^2$ para todo x.*

Inicialmente, lembremos que $coshx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$*. Mais uma vez nos valeremos da série de Maclaurin para* e^x *e, assim, seremos capazes de escrever cosh como soma de uma série, facilitando a comparação com o lado direito da desigualdade. Então:*

$$coshx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left(2 + 2.\frac{x^2}{2!} + 2.\frac{x^4}{4!} + \dots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Como $\dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dots$ *é uma soma cujas parcelas são todas positivas, independetemente do valor de* x*, concluímos que* $coshx = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

3 ALGUMAS APLICAÇÕES INTERESSANTES DE SÉRIES

0,999... = 1

No ensino fundamental, ficamos um tanto quanto incrédulos quando o professor de matemática nos diz que 0,999...=1. Pensamos: como podem ser iguais se já estamos vendo que são diferentes? Pois é, a matemática tem dessas coisas! Vejamos abaixo uma possível construção desse resultado.

Olhando com atenção para o número 0,999..., podemos reescrevê-lo do seguinte modo:

$$0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ...$$

Observe que apenas escrevendo o número 0,999... de uma forma conveniente, deixamos de enxergá-lo como um número e passamos a vê-lo como uma soma infinita. Podemos melhorá-la um pouco mais e teremos:

$$0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Sim, trata-se de uma série geométrica. Diante disso, faz-se oportuno recordarmos um resultado do primeiro capítulo que diz:

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$ *é convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma é:* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{r-1}$, *com* $|r| < 1$. *Se* $|r| \geq 1$, *a série é divergente.*

Olhando para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, identificamos que $r = \frac{1}{10} \leq 1$. Logo, essa série é convergente. Podemos identifcar ainda $a = \frac{9}{10}$. Assim, ao completar a soma da série obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

O aluno do ensino fundamental acaba relacionando uma quantidade finita de noves à quantidade infinita deles, o que não funciona. Ele pensa:

Se:

$$1 - 0,9 = 0,1$$
$$1 - 0,99 = 0,01$$
$$1 - 0,999 = 0,001$$

então, (e é aqui que mora o perigo!) $1 - 0,999... = 0,0...01$.

Mas, na verdade, o que gera o dígito 1 à direita dos zeros é justamente o fato de os noves serem finitos, o que não acontece em $0,999\ldots$.

No próximo tópico, buscaremos aproximar o valor de π através da soma de uma série de potências.

UMA APROXIMAÇÃO PARA π

Neste tópico, tentaremos encontrar uma aproximação para o mais famosos número irracional da história da matemática, o número *pi*. Resultado da divisão do perímetro de um círculo por seu diâmetro, o número transcedente *pi*, até onde se sabe, foi inicialmente estudado na antiguidade por Arquimedes e, apenas em 1707 passou a ser sinalizado pela letra grega π.

Ao procurarmos uma aproximação para π através de uma função representada como série de potências, torna-se relevante nos atentarmos para dois pontos:

I) Dada $y = f(x_0)$, nos interessa que exista $x \in Dom f$, tal que $f(x_0) = \frac{\pi}{k}, k \in \Re$;
II) Precisamos ser capazes de encontrar, uma vez conhecendo f que atenda o item I, uma

representação para essa função como série de potências.

Um interessante ponto de partida é lembrar que $tg\frac{\pi}{4} = 1$. Daí, $arctg1 = \frac{\pi}{4}$ e ainda $\pi = 4arctg1$.

Com isso,podemos concluir que se formos capazes de encontrar uma representação em série de potências para $f(x) = 4arctgx$, basta fazermos $x = 1$ que teremos nossa aproximação para π a partir do truncamento da série em um número finito de termos.

Para começar, é importante recordar que $arctgx = \int \frac{1}{1+x^2}$ e que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$. Assim, parece promissor partirmos da série geométrica para posteriormente obtermos$f(x)$.

Do capítulo anterior sabemos que:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad R = 1$$

Substituíndo-se x por $-x^2$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int f(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.x^{2n} \right) dx = \int (-x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots)$$

Temos então que:

$$f(x) = tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Como $arctg1 = \frac{\pi}{4}$, é conveniente tomarmos $g(x) = 4f(x)$. Dessse modo,

$$g(x) = 4tg^{-1}x = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = 4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{5} - \frac{4x^7}{7} + \dots$$

Agora que encontramos a função adequada para a aproximação, podemos aplicar $x = 1$ para vermos os resultados. Assim,

$$4tg^{-1}1 = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots \Rightarrow 4\frac{\pi}{4} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots$$

e, desse modo,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots$$

Tomando, por exemplo, apenas as cinco primeiras parcelas da soma infinita, obtém-se:

$$\pi \simeq 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \simeq 3,34$$

o que já é uma proximação bastante razoável para um número pequeno de parcelas.

Vale destacar ainda que, através dessa construção, escrevemos o número π como uma soma infinita contendo apenas números racionais.

SOMAÇÃO POR PARTES x INTEGRAÇÃO POR PARTES

Antes de encerrar o capítulo, exploremos a relação existente entre a somação por parte e a integração por partes. A família da somação por partes compõe um rol de ferramentas utilizadas para computar a soma de sequências.

Definição 9. *Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.*

A fórmula de somação por partes: Seja

$$\Delta(a_k.b_k) = a_{k+1}.b_{k+1} - a_k.b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k\Delta a_k$$

Daí resulta

$$a_{k+1}\Delta b_k = \Delta(a_k.b_k) - b_k\Delta a_k$$

Somando, obtemos a fórmula desejada:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta a_k$$

Observando-se com atenção, nota-se certa semelhança entre a fórmula da somação por partes e a da integração por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Isso não ocorre por acaso. Pode-se dizer, inclusive, que a somação é a discretização da integração, ou seja, enquanto a integração opera com intervalos contínuos, a somação considera apenas intervalos discretos. Vejamos um exemplo para ficar mais claro.

Exemplo 35. *Calcule* $\sum_{k=1}^{n} ke^k$ *através do método da somação por partes e resolva a integral* $\int_1^n xe^x dx$. *Que semelhança se pode notar nos dois processos?*

Calculemos, incialmente, $\sum_{k=1}^{n} ke^k$ *pela fórmula da somação por partes. Como* $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta a_k$, *temos que em* $\sum_{k=1}^{n} ke^k$:

$$\Delta e^k = e^{k+1} - e^k = e^k(e-1).$$

Logo, $e^k = \dfrac{1}{e-1}\Delta e^k$ *e* $\sum_{k=1}^{n} ke^k = \dfrac{1}{e-1}\sum_{k=1}^{n} k\Delta e^k$.

Além disso, $a_{k+1} = k$ *portanto,* $a_k = k-1$ *e* $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 1$. *Assim,*

$\sum_{k=1}^{n} ke^k = \dfrac{1}{e-1}\sum_{k=1}^{n} k\Delta e^k = \dfrac{1}{e-1}\left[n.e^{n+1} - 0 - \sum_{k=1}^{n} e^k.1\right]$. *Daí, resulta:*

$$\sum_{k=1}^{n} e^k = \frac{1}{e-1}\left[ne^{n+1} - \left(\frac{e-e^{n+1}}{1-e}\right)\right] = \frac{1}{e-1}\left[\frac{ne^{n+1} - ene^{n+1} + e^{n+1} - e}{1-e}\right] =$$

$$\frac{1}{e-1}\left[\frac{(n-en+1)e^{n+1} - e}{1-e}\right] = \frac{(en-n-1)e^{n+1}+e}{(e-1)^2}.$$

Por outro lado, através da integração por partes temos:

Em $\displaystyle\int_1^n ke^k dk$, *façamos* $u = k$ *e* $dv = e^k$. *Assim,* $du = dv$ *e* $v = e^k$. *Substituíndo-se na fórmula* $\displaystyle\int udv = u.v - \int vdu$, *vem:*

$$\int_1^n ke^k dk = (ke^k - \int e^k dk)]_n^1 = (ke^k - e^k)]_1^n = ne^n - e^n - (1e^1 - e^1) = ne^n - e^n = (n-1)e^n$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{(en-n-1)e^{n+1}+e}{(e-1)^2} \;\; e \;\; \int_1^n ke^k dk = (n-1)e^n.$$

Dadas as soluções acima, nota-se que em ambos processos ocorre uma etapa intermediária na qual tanto a integral como o somatório são simplificados e levados a estruturas mais simples, cujos resultados são conhecidos. Desse modo, em ambos os casos, resolve-se o problema inicial em duas etapas.

Ressalta-se ainda que, embora tenhamos trabalhado com somatório finito (e integral definida), estes métodos seriam aplicáveis para um somatório infinito (e integral imprópria), usando o limite de somas finitas.

4 OUTRAS SÉRIES IMPORTANTES

Neste capítulo, será apresentada a série de Fourier, bem como serão vistas algumas de suas importantes aplicações. Na sequência, veremos a importância da função de Weierstrass para o cálculo e para a análise matemática. Destaque-se que o objetivo primário aqui será trazer informações mais como curiosidades, isentando-nos, na maior parte do tempo, de demonstrações e formalismos.

SÉRIES DE FOURIER

Físico e matemático francês, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1766-1830), empregou as séries trigonométricas em suas pesquisas acerca da teoria do calor. Surpreendentemente, Fourier não inventou as séries de Fourier. A construção da teoria do desenvolvimento de funções através de séries trigonométricas deveu-se, especialmente, a Daniel Bernoulli e Leonard Euler. Vale destacar que, em 1777, Euler chegou às fórmulas integrais que definem os coeficientes a_0, a_n e b_n.

Definição 10. *Série de Fourier: A série de Fourier de uma função f, definida no intervalo $(-p, p)$ é dada por*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi}{p}x + b_n sen\frac{n\pi}{p}x\right), \textit{ onde}$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)cos\frac{n\pi}{p}xdx;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) sen \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Essa série, notabiliza-se por representar funções infinitas e periódicas complexas que modelam certos processos físicos, como o calor transferido por condução em uma haste e o deslocamento de uma corda ideal.

- **Convergência de uma Série de Fourier**

O próximo teorema nos fornece as condições suficientes para que a série de Fourier convirja em um ponto.

Teorema 7. *Condições de convergência: Sejam f e f' parcialmente contínuas no intervalo $(-p, p)$; isto é, sejam f e f' contínuas exceto em um número finito de pontos no intervalo e tendo apenas descontinuidades finitas nesses pontos. Então, a série de Fourier no intervalo converge para $f(x)$ em um ponto de continuidade. Em um ponto de descontinuidade, a série de Fourier converge para a média*

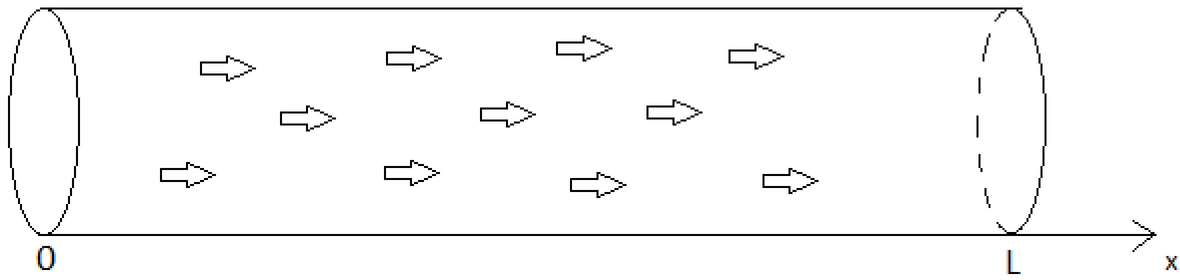
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

onde $f(x+)$ e $f(x-)$ denotam os limites de f em x à direita e à esquerda, respectivamente.

- **Equação do Calor**

Observe a Figura 4.1, onde está representada uma haste circular delgada, de comprimento L e cuja a seção transversal tem A como área.

Figura 4.1: Fluxo de calor na haste



Suponhamos que a haste coincida com o eixo x no intervalo $[0, L]$. De acordo com Zill (2001), devemos considerar que:

1. O fluxo de calor dentro da haste se verifique apenas na direção x;
2. A superfície lateral da haste é isolada, ou seja, nenhum calor escapa dessa superfície;
3. Não há calor sendo gerado dentro da haste;
4. A haste é homogênea, em outros termos, sua massa por unidade de volume ρ é constante;
5. O calor específico γ e a condutividade térmica K do material da haste são constantes.

A partir dessas considerações e de duas leis empíricas a saber:

I) A quantidade de calor Q em um elemento de massa m é dada por $Q = \gamma m u$;
II) A taxa Q_1 de fluxo de calor através da seção transversal é proporcional a área A e à derivada parcial da temperatura em relação a x.

Dessa forma, somos capazes de estabelecer a equação de derivadas parciais que é satisfeita por $u(x, t)$. Daí obtêm-se:

$$\frac{K}{\gamma p} u_{xx} = u_t$$

sendo usual fazer $k = \dfrac{K}{\gamma p}$, em que k é chamada de difusividade térmica.

Assim, podemos reescrever a equação obtida como

$$ku_{xx} = u_t$$

Agora, seja $f(x)$ a temperatura inicial ao longo de todo o comprimento L da barra, mantida as extremidades à temperatura 0 para todo tempo $t > 0$, a temperatura $u(x,t)$ na haste é determinada com base no seguinte problema de valor de contorno:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L.$$

Uma solução do problema acima é dada pela série infinita

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi}{L}xdx\right)e^{-x\left(n^2\frac{\pi^2}{L^2}\right)t} sen\frac{n\pi}{L}x$$

E no caso especial em que $u(x,0) = 100$, $L = \pi$ e $k = 1$, obtem-se

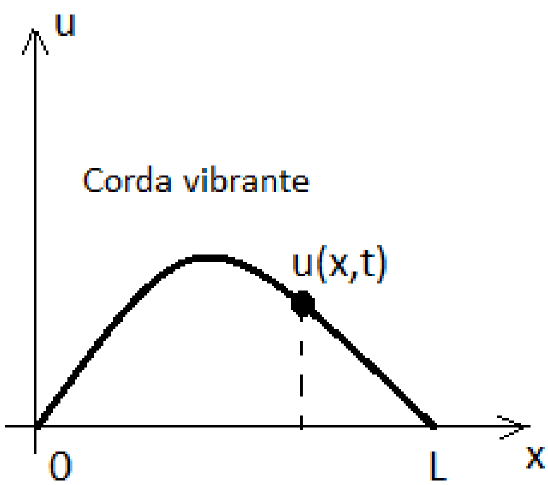
$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]e^{n^2 t} sen\, nx$$

Uma última curiosidade sobre a equação do calor é sua aplicação em probabilidade, descrevendo passeios aleatórios. Por isso, também ganha aplicação em matemática financeira.

- **Equação da Onda**

Seja λ uma corda de comprimento L, tensionada e fixada em dois pontos do eixo x, $x_1 = 0$ e $x_2 = L$ (Figura 4.2).

Figura 4.2: Esquema de corda vibrante



No momento em que a corda começa a vibrar, suponha que o movimento se verifique no plano xy de modo que cada ponto da corda se mova em uma direção perpendicular ao eixo x. Seja $u(x,t)$ o deslocamento vertical de um ponto qualquer da corda mensurada a contar do eixo x para $t > 0$. De acordo com Zill (2001), devemos considerar ainda que:

1. A corda é perfeitamente flexível;
2. A corda é homogênea (sua massa por unidade de comprimento é constante);
3. Os deslocamentos u são pequenos comparados com o comprimento da corda;
4. A inclinação da curva é pequena em todos os pontos;
5. A tensão T atua tangencialmente à corda e seu módulo T é o mesmo em todos os pontos;
6. A tensão é grande comparada com a força da gravidade;
7. Nenhuma outra força externa atua sobre a corda.

Daí, através da relação física da força vertical resultante que atua em um trecho ΔS da corda e da aplicação da Segunda Lei de Newton, chega-se à esquação que descreve a propagação das ondas, sendo dada por:

$$u_{xx} = \left(\frac{p}{T}\right) u_{tt}$$

Fazendo $\dfrac{T}{P} = a^2$, têm-se $a^2 u_{xx} = u_{tt}$.

Com isso, o deslocamneto vertical $u(x,t)$ de uma corda vibrante de comprimento L, é dado pela solução do seguinte problema de contorno:

$$a^2 \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{du}{dt}|_{t=0} = g(x),\ 0 < x < L$$

Realizados os cálculos pertinentes, chega-se à solução que é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{cosn\pi a}{L} t + B_n sen \frac{n\pi a}{L} t\right) sen \frac{n\pi}{L} x, \qquad \text{onde:}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^l f(x) sen \frac{n\pi}{L} x dx \qquad \text{e} \qquad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) sen \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Os estudos acerca das equações de onda foram bastante relevantes na história da matemática e marcaram o século XVII. Muitos matemáticos notáveis como Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange debruçaram-se sobre o problema da corda vibrante e fizeram progresso para solucioná-lo. Além da importância natural do problema, em razão de suas aplicações físicas, cabe destacar sua contribuição para compreensão da natureza de uma função, pois àquela altura o conceito de função não estava formulado como hoje conhecemos.

FUNÇÃO DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass (1815-1897) foi um matemático alemão, que lecionou durante quize anos em uma escola secundária e, por isso, suas pesquisas foram ignoradas por muito tempo. Em 1854, publicou um artigo que lhe rendeu reconhecimento internacional e, em 1856, assumiu uma cadeira na Universidade de Berlim, iniciando sua carreira como professor universitário. Destacaremos, nesta seção, uma função apresentada por Weierstrass em 1872, que estarreceu a comunidade matemática daquela época.

Quando estudamos Cálculo Diferencial e Integral, somos apresentados ao seguinte teorema:

"Se uma função for diferenciável em a, então ela é contínua em a".

Apesar de ser um teorema poderoso, surge naturalmente uma indagação: existe alguma função não diferenciáveis em a, mas que seja contínua em a?

Antes de responder a essa pergunta, vejamos alguns conceitos preliminares relevantes.

Definição 11. *Sequência de Funções: Uma sequência de funções é uma sequência $n \mapsto f_n$, onde cada f_n é uma função.*

Definição 12. *Convergência Uniforme: Seja f_n uma sequência de funções definidas em A e seja $f = B \mapsto R$, com $B \subset A$. Dizemos que a sequência de funções f_1 converge uniformemente a f em B se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 (que só dependa de ϵ), tal que, para todo $x \in B$,*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Cabe ressaltar que na convergência uniforme o índice é sempre o mesmo para todo x.

Critério M de Weierstrass. Seja $\sum_{k=0}^{+\infty} fk$ uma série de funções e, suponhamos que exista uma série numérica $\sum_{k=0}^{+\infty} Mk(x)$ tal que, para todo $x \in B$ e para todo natural k,

$$|f_k(x)| \leq M_k$$

Nestas condições, se a série $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k$ for convergente, então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ convergirá uniformemente, em B, à função $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

Voltando à pergunta, sua resposta foi apresentada por Weierstrass, ao mostrar que as funções da forma $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$ onde $b \in (0,1)$ e a é um inteiro positivo ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ são contínuas em $\Re$ e não diferenciáveis em qualquer ponto.

I) Continuidade de W.

Como $b \in (0,1)$, então $\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} < \infty$. Juntando esse resultado ao fato de que $sup_{x\in\Re}|b^n cos(a^n \pi x)| \leq b^n$, pode-se concluir, através do critério M de Weierstrass que $\sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$ converge uniformemente para $W(x)$ em $\Re$. Assim, W é contínua em $\Re$.

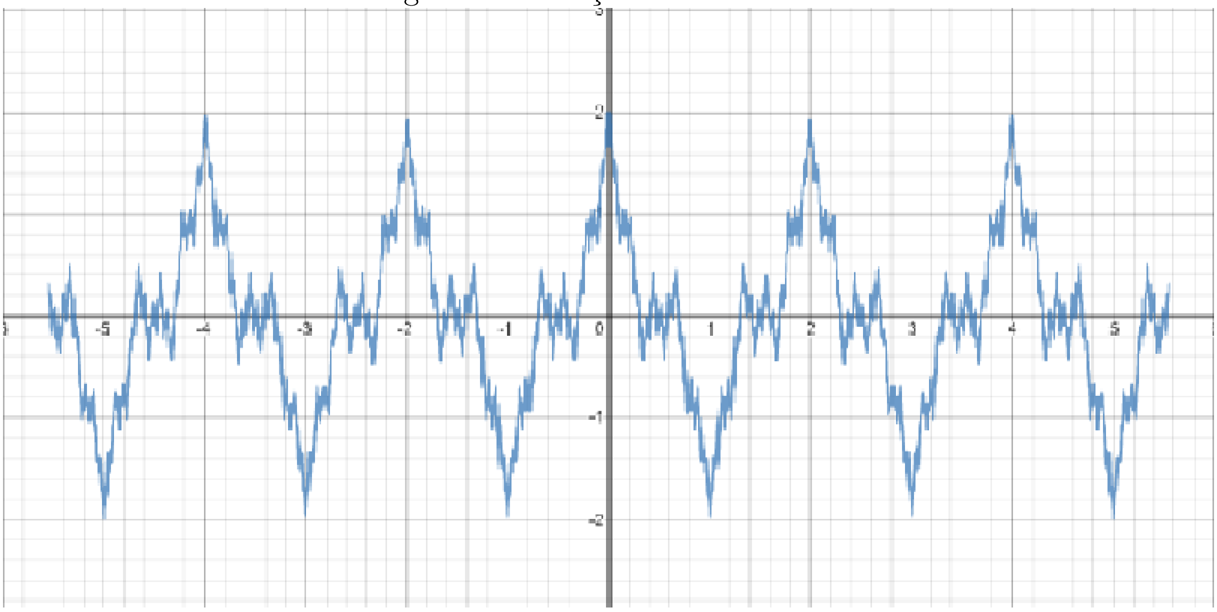
II) Não diferenciabilidade.

Apesar de não ser apresentada aqui a demonstração para a não diferenciabilidade, o gráfico mostrado na Figura 4.3 traz uma boa visualização dessa propriedade.

Seja

$$y = \sum_{n=0}^{c} (a^n.cos(b^n \pi x)), \text{ onde } a = 0,\ b = 3 \text{ e } c = 100, \text{ temos:}$$

Figura 4.3: Função de Weierstrass



Assim, pode-se observar que mesmo sendo possível esboçar o gráfico sem retirar a caneta do papel, o que indica continuidade, o gráfico é repleto de quinas, o que referencia sua não diferenciabilidade. Caso fosse ampliada a visualização do gráfico, notaria-se que as quinas se dão em todos os seus pontos.

Para encerrar, um interessante detalhe histórico: a função particular apresentada por Weierstrass em 1872, foi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n cos(13^n \pi x)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do trabalho foram apresentadas diversas ferramentas para subsidiar a análise de uma série quanto à sua convergência ou divergência. Algumas dessas técnicas proporcionam uma revisão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e, até mesmo, de conceitos da educação básica.

Na sequência, foi vista a utilidade de se representar funções como séries de potências. A partir desse ponto, tornou-se possível integrar funções de que antes não éramos capazes.

A seguir, voltamos no tempo e nos perguntamos: *Seria 0,9999... = 1?*. Essa pergunta é respondida positivamente, sendo mediada pelos instrumentos aprendidos nos capítulos anteriores. Além disso, fomos capazes de expressar π como uma soma infinita de números racionais, tornando evidente a versatilidade das séries. O capítulo de aplicações encerra-se com a exposição da somação por partes, um processo permeado pelas séries, que permite, inclusive, somar progressões de ordem superior à primeira. Ademais, traça-se um paralelo com a integração por partes, sendo a somação uma versão discreta do contínuo processo de integração.

Avança-se um pouco mais através das Séries de Fourier, apresentam-se aplicações de impacto à sociedade em geral, com a modelagem de fenômenos físicos, aproximando-se a teoria e a prática. E terminamos, talvez tão surpresos quanto a comunidade matemática de 1872, quando Weierstrass mostrou ao mundo um novo possível: uma função contínua em $\Re$, porém não derivável em nenhum ponto de seu domínio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1999.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar** - Vol. 1. Números Reais, SBM, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. v.4, 3. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2, 7. ed., São Paulo: Cengage Learning, 2013.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO. UNIVERSIDADE DE LISBOA. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass**. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Weierstrass.htm. Acesso em: 10 jan. 2021.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v.1, 3. ed., São Paulo: HARBRA, 1994.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. v.2, 3.ed., São Paulo: HARBRA, 1994.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v.1, 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de Uma Variável**. v.1, 11. ed., Rio de janeiro: IMPA, 2012.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**. v. 2, 3. ed., São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.