UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCO RODRIGUES MARINI

EXPLORANDO O ENSINO DE VARIÁVEIS ALGÉBRICAS NO 7° ANO: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

RIO DE JANEIRO
2023

UNIRIO

FRANCO RODRIGUES MARINI

EXPLORANDO O ENSINO DE VARIÁVEIS ALGÉBRICAS NO 7° ANO: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

Trabalho de conclusão de curso de Pós-Graduação Stricto Sensu de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Gladson Octaviano Antunes
Coorientadora: Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes

Rio de Janeiro

2023

FRANCO RODRIGUES MARINI

EXPLORANDO O ENSINO DE VARIÁVEIS ALGÉBRICAS NO 7° ANO: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 10 de Outubro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Gladson Octaviano Antunes

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes (Orientador)
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Aline Caetano da Silva Bernardes

Prof. ª Dr. Aline Caetano Bernardes da Silva (Orientadora)
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Bruna Moustapha Corrêa

Prof. Dr. Bruna Moustapha Corrêa
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Leticia gRangel

Prof. Dr. Letícia Guimarães Rangel
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

Rodrigues Marini, Franco

RM339e EXPLORANDO O ENSINO DE VARIÁVEIS ALGÉBRICAS NO 7º ANO: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM O GEOGEBRA / Franco Rodrigues Marini. -- Rio de Janeiro, 2023.

82

Orientador: Gladson Octaviano Antunes Octaviano Antunes.

Coorientadora: Aline Caetado Bernardes da Silva .

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Especialização em Mestrado, 2023.

1. variáveis. 2. pensamento algébrico. 3. concepções da álgebra. I. Octaviano Antunes, Gladson Octaviano Antunes , orient. II. Caetado Bernardes da Silva , Aline , coorient. III. Título.

Dedico este trabalho à família Marini, senhores do meu coração.

AGRADECIMENTOS

A realização de cada etapa deste trabalho foi muito difícil. Em todo o processo, foi necessário muita dedicação e paciência. Se, durante toda essa caminhada, não tivesse a ajuda, dedicação, apoio e o incentivo do meu orientador Gladson e da minha coorientadora Aline, certamente esta dissertação não chegaria à sua conclusão. A estes dois excelentíssimos professores, o meu mais profundo agradecimento.

Agradeço também *à* UNIRIO e a todo o copo docente por sempre oferecer momentos acolhedores e informativos do qual, além de boas lembranças, levarei muitos aprendizados para a minha vida profissional e acadêmica.

"Se soubéssemos o que era aquilo que estávamos fazendo, não seria chamado de pesquisa." Albert Einstein

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

A compreensão e a manipulação de variáveis algébricas sempre foram apontadas por diversas pesquisas científicas como assuntos de difícil compreensão por parte dos alunos do Ensino Fundamental. Uma das causas desse problema parte de uma característica inerente à própria álgebra: a diversidade de formas de se conceber uma variável. Nas abordagens de muitos professores e livros didáticos, há a tendência em privilegiar determinadas concepções – tais como a variável como incógnita – em detrimento de outras – como a formulação de expressões ou fórmulas. Devido a este desequilíbrio, o conhecimento do estudante em álgebra fica incompleto e limitado, causando assim, dificuldades na compreensão plena do conteúdo e no progresso para assuntos mais avançados. Os objetivos de pesquisa foram analisar como as variáveis algébricas são introduzidas no 7° ano, por meio dos livros didáticos, e elaborar uma proposta de atividades que melhor contribuam para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esta pesquisa buscou, portanto, realizar uma pesquisa documental em livros didáticos de matemática do 7° ano em que são analisadas as formas de apresentação do conceito de variável. Observou-se que a introdução das variáveis é feita de forma apressada, passando-se rapidamente para as manipulações algébricas. Buscou-se ainda realizar uma pesquisa bibliográfica, visando a elaboração de um produto com quatro sequências didáticas, implementadas no *Geogebra*, cujas atividades fazem referência ao desenvolvimento de concepções da álgebra pouco contempladas nos livros didáticos analisados.

Palavras – Chave: variáveis, concepções da álgebra, pensamento algébrico, generalizações de padrões, Geogebra.

ABSTRACT

The understanding and manipulation of algebraic variables have always been highlighted by various scientific research as subjects that are difficult for elementary school students to understand. One of the causes of this problem comes from an inherent characteristic of algebra itself: the diversity of ways of conceiving a variable. In the approaches of many teachers and textbooks, there is a tendency to privilege certain conceptions – such as the variable as an unknown – to the detriment of others – such as the formulation of expressions or formulas. Due to this imbalance, the student's knowledge in algebra is incomplete and limited, thus causing difficulties in fully understanding the content and no progress towards more advanced subjects. The research objectives were to analyze how algebraic variations are introduced in the 7th year, through textbooks, and to develop a proposal for activities that best contribute to the development of algebraic thinking. This research sought, therefore, to carry out documentary research in 7th year mathematics textbooks in which the ways of presenting the concept of variable are proven. Note that the introduction of variables is done hastily, quickly moving on to algebraic manipulations. A bibliographical research was also carried out, evolving the elaboration of a little product with four didactic sequences, novels in Geogebra, whose activities make reference to the development of algebra concepts contemplated in the textbooks developed.

Keywords: variables, concepts of algebra, algebraic thinking, generalizations of patterns, Geogebra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao pensar em todos os assuntos abordados na matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e que causam maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos, certamente estarão entre eles, os que fazem referência ao uso de variáveis ou incógnitas e, de um modo mais geral, à utilização da linguagem algébrica. Isso se deve muito ao caráter abstrato e multifacetado que as letras podem assumir na matemática. O uso das variáveis está associado a mais de um contexto, isto é, ora usa-se as letras para escrever fórmulas ou estabelecer funções, ora, para resolver equações e em outros momentos as usamos para fatorar expressões. Há pesquisas que se propuseram a criar categorias para as diferentes formas de uso das variáveis. Kieran (2004), por exemplo, considera três casos: o primeiro, refere-se à utilidade da letra algébrica para generalização; no segundo, a variável é tratada como um simples valor desconhecido – em que se deseja ou não descobrir seu valor – e, no terceiro, as letras operam como ferramenta de modelagem ou para a resolução de problemas. Já Ursini e colaboradores (2005) e, a referência de maior relevância para esta dissertação: Usiskin (1995), consideram importante, por exemplo, tratar as situações em que a variável desempenha o papel de incógnita à parte dos casos em que ela é usada para manipulações algébricas. As formas de categorizar a diversidade dos papéis das variáveis em álgebra diferenciam-se de autor para autor, porém a consciência da distinção de concepções quanto ao uso das letras é o mais importante, pois o desenvolvimento do aluno em cada uma delas se faz essencial para o seu progresso na matemática como um todo.

São muitos os papéis que a variável pode assumir em uma mesma situação-problema. Randolph (1992) cita um sinal da confusão dos alunos sobre qual concepção algébrica o problema está se referindo:

> Considere o seguinte problema:
> ‘Simplifique a expressão: 3x+5x-24’
> Quantas vezes nós vimos os alunos simplificando a expressão dada, criando a equação 3x+5x-24=0 e chegando-se à solução x=3’? (Randolph, 1992, p. 560)

Como professor, o autor desta dissertação já testemunhou algumas situações de estudantes com esse tipo de dificuldade. Em uma turma de nono ano, ao apresentar uma fórmula que expressava explicitamente uma variável em função de outra, questionou-se qual seria o valor da primeira variável, quando a outra assume um determinado valor específico. Os alunos apresentaram dificuldades e percebia-se que os estudantes não estavam compreendendo o significado da expressão algébrica apresentada.

O aparecimento de dificuldades desse tipo é um sinal de que a ideia de expressões algébricas que relacionam duas variáveis não foi devidamente compreendida pelos alunos. Como consequência, a habilidade deles na interpretação de fórmulas ou modelos matemáticos fica prejudicada. Falta, neste caso, o desenvolvimento e a exploração de certos componentes do pensamento algébrico. Este último consta no desenvolvimento e exploração de todo e qualquer raciocínio autônomo voltado para o campo da álgebra, seja na formação de sua linguagem ou em todo pensamento que justifique tal codificação. São exemplos da manifestação do pensamento algébrico o conhecimento de técnicas e manipulações, a habilidade de criar e reconhecer variáveis, a interrelação entre as mesmas e a detecção e generalização de padrões. Muitos pesquisadores buscaram descrever e explicar os componentes do pensamento algébrico e até onde vai sua abrangência. No entanto, não há unanimidade na formulação de uma definição sobre o pensamento algébrico, como será possível ver a partir das pesquisas de Ponte e colaboradores (2009) e de Fiorentini e colaboradores (2005).

A Base Nacional Comum curricular (BNCC) cita o pensamento algébrico, apontando como exemplo de sua manifestação e desenvolvimento nas "demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações." (Brasil, 2018, p. 527).

Há várias pesquisas que têm contribuído para a discussão acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nas escolas e, mais especificamente, para a questão de explorar os diferentes papéis que as letras podem desempenhar. O trabalho de Souza & Diniz (2008), bem como o de Tinoco (2008), por exemplo, consideram válida a ideia de tirar a ênfase na exposição de técnicas e manipulações algébricas e explorar mais a capacidade de generalização de padrões que a variável tem. Ambos os trabalhos propõem atividades que envolvam sequências e detecção de padrões como exemplos de situações que esta concepção algébrica pode ser trabalhada. Outros autores como Alvarenga & Vale (2007), Branco (2008), Ribeiro & Cury (2008) e até os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) corroboram com a ideia de se utilizar atividades envolvendo sequências (recursivas ou não) para trabalhar a formulação de expressões algébricas com intuído de generalização dos padrões observados. Boa parte desses pesquisadores chegaram à conclusão de que atividades como essa têm um maior potencial de capacitar o aluno a usar a variável como ferramenta de abstração e, assim, levá-lo a compreender seus fundamentos.

Os objetivos gerais deste trabalho fazem referência ao ensino de variáveis no Ensino Fundamental e se dividem em duas etapas. A primeira consta em descrever criticamente o modo como a apresentação do conceito de variável está sendo dado em algumas coleções de livros didáticos que circulam nas escolas e, a segunda, é a formulação de um produto educacional que são quatro sequências didáticas que trabalhem com variáveis sob a luz de concepções pouco exploradas em sala de aula. Tais objetivos buscam trazer uma maior reflexão crítica de como os tópicos algébricos iniciais estão sendo conduzidos e também iniciar discussões sobre ações e propostas em sala de aula para desenvolver as habilidades do aluno nesse assunto.

Este trabalho está organizado da seguinte forma, no capítulo 2 apresentamos o referencial teórico utilizado para a fundamentação da análise documental dos livros didáticos e também para a formulação das sequências didáticas. Ou seja, a fundamentação teórica baseia-se na discussão das diferentes concepções da álgebra; na discussão das características do pensamento algébrico; na exposição das competências e habilidades listadas pela BNCC, que devem ser desenvolvidas nas aulas de álgebra e, por fim, na discussão de ideias e propostas em sala de aula que promovam um maior entendimento e aproveitamento para o ensino da álgebra.

No capítulo 3 encontra-se a descrição das metodologias que serão utilizadas na pesquisa. A primeira, apresentada no capítulo 4, será uma análise documental de cinco livros didáticos do 7° ano do Ensino Fundamental - todos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2020 - a respeito da forma adotada para se introduzir o conceito de variável. É através dessa análise crítica que se chegará à conclusão de que certas concepções algébricas são mais exploradas e contempladas que outras.

A outra metodologia, exposta no capítulo 5, será uma pesquisa bibliográfica em que, pautados em determinados trabalhos apresentados no referencial teórico, será formulado um produto educacional: quatro sequências didáticas que trarão atividades digitais, cujo objetivo geral é o desenvolvimento da capacidade do aluno em montar expressões algébricas, que representem a generalização de padrões observados em sequências ou em situações-problemas propostas. As considerações finais desta pesquisa estão no capítulo 6.

Espera-se que esta pesquisa possa ser útil aos professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, ao fornecer elementos para que os mesmos possam refletir com criticidade sobre como o conceito de variável tem sido introduzido nos livros didáticos e que possam se inspirar nas atividades apresentadas para introduzir o conceito de variável.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como já foi dito, o foco deste trabalho será o ensino da álgebra no Ensino Fundamental – anos finais. Para isso, se faz muito importante, inicialmente, apresentar, estabelecer e refletir os diferentes modos de emprego das variáveis. Tão importante quanto a exposição das diferentes concepções para o uso de uma variável, são as orientações da BNCC a respeito do momento mais apropriado para se explorar cada uma das concepções, bem como o grau de ênfase a ser dado. É necessário também apresentar propostas mais concretas de atividades que ajudem o estudante a melhor desenvolver e consolidar a essência do uso das letras em álgebra. Todos esses tópicos serão vistos a seguir.

2.1 Concepções da álgebra

Não se faz o emprego de letras algébricas apenas para determinar o valor desconhecido desta em uma equação. O raciocínio das técnicas usadas para se chegar à solução desse caso, será consideravelmente diferente do usado para fatorar uma expressão ou montá-la para descrever determinado processo da natureza. É necessário, portanto, categorizar os modos de se enxergar e usar as variáveis para, assim, ter mais clareza dos assuntos que serão tratados.

Randolph (1992) faz algumas observações e apontamentos sobre a confusão por parte dos alunos a respeito dos "símbolos literais". Sem maiores aprofundamentos, o autor faz uma crítica sobre a assimetria entre a sintática e a semântica da álgebra:

> A álgebra é sintaticamente forte mas semanticamente fraca. Talvez, um jeito de fortalecer o papel semântico da álgebra para os estudantes, seria incluir discussões sobre as diversas formas que os símbolos literais são usados em matemática. Uma discussão geralmente omitida de textos matemáticos. (RANDOLPH, 1992, p. 561)

São muitos os autores que buscam esclarecer os diferentes papéis que a variável pode assumir. Para isso, muitos deles estabelecem uma categoria para cada perspectiva de uso das letras em álgebra. Kieran (2004), divide as “atividades em álgebra” em três tipos: “geracional”, “transformacional” e “global”. As dos primeiros tipos, se referem ao uso da variável para formulação de expressões algébricas para representar generalizações de padrões ou sequências numéricas. Atividades que trabalham e envolvem técnicas de manipulações, tais como fatoração, redução de termos semelhantes ou resolução de equação, são intituladas de “transformacionais”. O último tipo se refere ao uso da álgebra como ferramenta de aplicação para outras áreas do conhecimento matemático, tais como modelagem ou resolução de problemas.

Ursini *et al* (2005) também se dispôs a dividir o uso da variável em três grupos: “a variável como incógnita”, “a variável como número genérico” e “as variáveis como relação funcional”. As do primeiro tipo, referem-se, especificamente, a casos de resolução de equações; na segunda categoria, a variável é usada para generalizações de padrões e, o último tipo, é reservado para os casos em que se usa variáveis para expressar relações entre grandezas.

Usiskin (1995) estabelece quatro diferentes tipos de concepções da álgebra: a álgebra como aritmética generalizada, a álgebra como um estudo de procedimentos para se resolver certos tipos de problemas, a álgebra como estudo de relações entre grandezas e a álgebra como estrutura. No que diz respeito as formas de dividir as concepções da álgebra, o trabalho de Usiskin será a principal referência em todo o desenvolvimento desta dissertação. Portanto, analisaremos detalhadamente cada uma das quatro concepções por ele formuladas.

2.1.1 Álgebra como aritmética generalizada

As palavras-chave para essa concepção são “traduzir e generalizar”. Isso é, nesse caso, usa-se a álgebra para descrever alguma propriedade, identidade ou sintetizar algum padrão encontrado. Geralmente antes de usarmos alguma letra de fato, observamos alguns casos particulares para detectarmos algum padrão e chegarmos a alguma generalização.

Um exemplo análogo ao fornecido por Usiskin (1995), é observarmos os resultados das potências abaixo:

$$5^3 \cdot 5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3+2} = 5^5$$

$$5^3 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3+3} = 5^6$$

$$5^3 \cdot 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3+4} = 5^7$$

Tendo como base os exemplos acima, se nos depararmos com a operação:

$$5^3 \cdot 5^n$$

Sem muito esforço, já conseguiremos concluir que n representa uma variável e que, operando-se de acordo com o que foi feito anteriormente, pode-se escrever:

$$5^3 \cdot 5^n = 5^{3+n}$$

Além disso, se fomos mais além na nossa análise, podemos desconfiar que o expoente "3" não tem nada de especial e, no lugar dele poderia ser qualquer outro número natural, escolhendo-se a letra m , tem-se que:

$$5^m \cdot 5^n = 5^{m+n}$$

Operando-se o mesmo raciocínio, agora com a base "5", não será difícil chegar à conclusão de que para qualquer número natural positivo (representado pela letra a) tem-se que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

A expressão acima é, portanto, uma síntese de um padrão de comportamento encontrado sejam quais forem os números inteiros não negativos encontrados na base e nos expoentes (representados, respectivamente, pelas letras a, m e n).

2.1.2 Álgebra como um estudo de procedimentos para se resolver certos tipos de problemas

Nesse momento, são estudadas as soluções de equações ou inequações. Ou seja, tem-se uma equação (ou inequação) cuja(s) variável(is) é(são) chamada(s) de incógnita(s) e sabe-se a que conjunto tais incógnitas pertencem (números naturais, inteiros, matriz etc.). Baseado nisso, lança-se mão de todas as técnicas de manipulação (próprias dos conjuntos que a incógnita pertencer) para, primeiramente, saber se é possível encontrar a solução para equação (ou inequação) proposta e, em caso afirmativo, chegar a tal solução.

2.1.3 Álgebra como estudo de relações entre grandezas

Essa concepção surge quando há uma relação entre duas ou mais grandezas e percebe-se que os valores de uma delas podem ser expressos em função das outras. No artigo de Usiskin (1995), é mencionada a relação A = b · h como um exemplo dessa concepção, pois ilustra a relação entre a área de um retângulo e as medidas de sua base e altura. Para esclarecer a diferença entre essa concepção e o caso de se ter a variável sendo usada como aritmética generalizada, Usiskin (1995) aponta:

> Considerando que a concepção de álgebra como estudo das relações pode começar com fórmulas, a distinção crucial entre essa concepção e a anterior é que, nesse caso, as variáveis variam. (Usiskin, 1995)

O foco dessa concepção está justamente na análise do comportamento da variável dependente em função das independentes. Nesse caso, as variáveis dependentes são tratadas e consideradas como argumentos e se faz natural a simbologia f(x), típica para se indicar uma função que tem como parâmetro ou argumento uma variável independente x.

2.1.4 A álgebra como estrutura

Nessa concepção, usa-se a variável para aplicar propriedades ou identidades já conhecidas (tais como o axioma da distributividade) com a finalidade de analisar, manipular ou provar outras propriedades já não tão conhecidas ou imediatas (como usar o argumento da distributividade para demonstrar as mais variadas formas de fatoração). Usiskin, (1995) explica bem essa concepção no seguinte trecho:

> Consideramos o seguinte problema:
> Fatorar
> $$3x^2 + 4ax - 12a^2$$
> A resposta à questão é
> $$(3x + 2a)(x - 6a)$$
> [...] nesse tipo de problema, o aluno tende a tratar as variáveis como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica. Na concepção da álgebra como estudo das estruturas, a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário. (Usiskin, 1995)

Esse tipo de concepção é diferente dos outros pois não há fórmula ou expressão para ser generalizada, não existe “um valor de x” para se determinar, nem há duas ou mais grandezas sendo relacionadas. Deixa-se de lado os valores que a variável representa e dá-se importância para todas as propriedades e axiomas característicos do conjunto de valores que tal variável representa; para assim buscar simplificações, manipulações e equivalências.

Ao listar e observar, separadamente, todas as concepções da variável, pode-se ter a ilusão de que o desenvolvimento de tais concepções sejam independentes uma da outra, mas isso não é verdade. São inúmeras as situações-problema cujas etapas até se chegar à solução trabalham a variável em diferentes papéis.

Tinoco (2008) traz um exemplo que necessita do desenvolvimento de mais de uma das concepções, categorizadas por Usiskin (2005):

> Para alugar mesas para uma festa, uma empresa cobra 10 reais por conjunto de mesa com quatro cadeiras e mais 15 reais de frete.
>
> a) Qual o total que uma pessoa vai pagar, se alugar 8 desses conjuntos?
>
> b) Que igualdade representa o total a pagar por uma pessoa que aluga um número qualquer de conjuntos desse tipo?
>
> c) Quanto pagará uma pessoa que alugue 15 conjuntos desses?
>
> d) Se uma pessoa pretende gastar 65 reais, para alugar conjuntos de mesas do tipo descrito, quantos conjuntos ela deverá alugar? (Tinoco, 2008, p. 11).

Para a resolução da letra (b), é necessário o desenvolvimento de um raciocínio voltado para a álgebra como generalizadora de padrões e, com isso, estabelecer a relação entre duas grandezas (a quantidade de conjuntos e o valor a ser pago por elas). Na letra (c), pode-se explorar a relação entre grandezas e calcular o valor a ser pago ao se solicitar quinze desses conjuntos. Na letra (d), pode-se usar a mesma relação entre grandezas para se montar uma equação e, assim, determinar o valor desconhecido de conjuntos de mesas solicitadas. A autora considera que os itens citados “ilustram a relação intensa que existe entre as várias concepções” (Tinoco, 2008, p. 12).

2.2 O pensamento algébrico

Na seção anterior, pudemos observar as diferentes formas de concepção e uso das variáveis. Em cada uma dessas concepções há um modo de raciocinar e um jeito de trabalhar com as letras algébricas bem característico, com a finalidade de buscar soluções ou generalizações para problemas de uma natureza específica. O conjunto de todas as formas de concepções das variáveis, articuladas com os sinais operacionais conhecidos da aritmética, visando a transição de uma determinada situação da natureza para a representação algébrica, pode ser visto como a formação de uma linguagem algébrica. Para alguns autores, são somente esses os componentes que formam o pensamento algébrico. No trabalho de Ponte *et al* (2009), por exemplo, afirma-se que o pensamento algébrico abarca as técnicas de resolução de equações e inequações e as formas de generalização de padrões.

> Inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (PONTE *et al*, 2009, p. 10)

Há outros autores que incluem outras habilidades ao escopo do pensamento algébrico. Fiorentini *et al* (2005) trazem uma fala de Vygostky a qual aponta a associação desse pensamento com a formação da linguagem algébrica mas também estabelece suas diferenças.

> Para Vygotsky (1993), pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento da outra e vice-versa. Ou seja, no processo ensino aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. (FIORENTINI *et al* et, 2005, p. 4-5).

Há, portanto, elementos do pensamento algébrico que não necessariamente fazem parte de sua linguagem. Por isso, Fiorentini *et al* (2005), ao discorrerem sobre o conceito deste pensamento, se preocupam de incluir esses elementos em suas abrangências e excluir dessas, as vezes em que usamos as letras para resolver equações ou fatorar polinômios.

> [...]elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização (FIORENTINI *et al* et, 2005, p. 5)

Apesar da falta de um consenso sobre o que é o pensamento algébrico, o autor desta pesquisa considera que a manifestação do pensamento algébrico se dá tanto pelo trabalho e exploração da linguagem algébrica quanto por todo e qualquer raciocínio que leve à formação de tal linguagem. Dessa forma, usar as letras algébricas para resolver equações e inequações, fatorar polinômios, expressar, generalizar e descrever determinado padrão é a manifestação do pensamento algébrico tanto quanto a simples detecção de regularidades ou a percepção de aspectos imutáveis em contraste com outros mutáveis. A descrição das habilidades que compõe o pensamento algébrico se faz importante pois fazem parte das recomendações da BNCC (2018) para o ensino da álgebra.

2.3 A BNCC e o ensino de álgebra

2.3.1. Sobre a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento produzido pelo Ministério da Educação (MEC) com a parceria do Conselho Nacional dos Secretários da Educação (CONSED) e da União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME). Esse documento tem caráter normativo, voltado exclusivamente à educação escolar tal qual definido pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB), visando a garantia do direito de aprendizagem conforme estabelecido pelo Plano Nacional de Educação (PNE). Para fugir da abstração sobre o que é "direito de aprendizagem", a BNCC define dez competências gerais as quais baseiam-se nas recomendações da LDB no que diz respeito ao tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). As competências citadas são as seguintes:

Quadro 1: Competências gerais da BNCC

	Competências gerais
1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva
2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico cultural.
4	Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual corporal, visual, sonora e digital, motora, como Libras, e escrita), bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar experiências que lhe possibilitem entender-se de conhecimentos e as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade
7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

fonte: (Brasil, 2018, p. 9)

O método adotado para atingir tais competências é a apresentação de uma lista inter-relacionada e progressiva de aprendizagens essenciais que devem ser trabalhadas nas escolas, com os alunos. Cada item desses conjuntos de aprendizagens é organizado por área de conhecimento e por componente curricular (as disciplinas). Todas essas recomendações, orientações e diretrizes contidas na BNCC, fazem com que esse documento seja peça-base para a formulação dos planejamentos das aulas dos docentes e do Projeto Político Pedagógico (PPP) das escolas de todo o país. Esse efeito é uma das finalidades apontadas pelo próprio documento:

> Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (BRASIL, 2017, p. 6)

Os princípios que norteiam a BNCC influenciam as ideias-base da formulação das competências específicas para o ensino da matemática, em especial para os alunos do Ensino Fundamental. Dessa disciplina, não espera-se a simples memorização de algoritmos para execução de determinados tipos de cálculos. O foco é no desenvolvimento autônomo do aluno, ou seja, o reconhecimento do significado teórico ou prático dos resultados que se encontra; associar e transportar entre os saberes da álgebra, aritmética, geometria e estatística e, também, relacionar tais saberes com fenômenos da vida cotidiana. Com essa prática, espera-se que o discente (principalmente os do Ensino Fundamental) desenvolva um raciocínio capaz de resolver situações-problema, realizar demonstrações e formar conjecturas utilizando seus próprios métodos, desenvolvendo, assim, o que a BNCC chama de letramento matemático.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2017, p. 266)

Tendo como base tais princípios, almeja-se as seguintes competências específicas para o ensino da matemática do Ensino Fundamental:

Quadro 2: Competências específicas da BNCC para matemática do Ensino Fundamental

	Competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental
1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão,

fonte: (Brasil, 2018, p. 267)

A BNCC divide a disciplina de matemática em cinco diferentes campos, os quais são chamados de unidades temáticas. São elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Cada uma dessas unidades tem habilidades próprias a serem cumpridas.

Ao comparar o conceito de letramento matemático e o de pensamento algébrico, discutido na seção 2.2, pode-se observar certas semelhanças em suas práticas. As diferentes formas de representar ou expressar o raciocínio matemático obtido é um exemplo de habilidade desenvolvida em ambos os conceitos. Porém, enquanto o pensamento algébrico lida com objetos e habilidades do conhecimento voltados para a álgebra, o letramento matemático é bem mais amplo, não se limitando na área de álgebra, mas também se estendendo para as áreas de geometria, aritmética, estatística e probabilidade. Ou seja, o conceito de pensamento algébrico pertence ao de letramento matemático mas o contrário não ocorre.

Neste trabalho, daremos foco nas habilidades destacadas pela unidade temática Álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.3.2 Orientações da BNCC para o ensino da Álgebra

Para o ensino da álgebra recomenda-se o desenvolvimento do pensamento algébrico; ferramenta fundamental para a formulação de modelos matemáticos que descrevem os mais variados fenômenos na sociedade, os quais muitos podem ser descritos e analisados através da representação e uso de letras e de outros símbolos. Para isso, deve ser estimulado o reconhecimento e generalização de padrões em sequências numéricas e não-numéricas, a exploração de situações-problema e a interrelação entre duas grandezas e, também, a transposição do que é expresso algebricamente para o formato de tabela ou de gráficos.

Para um desenvolvimento pleno de tais habilidades, recomenda-se que desde os primeiros anos do Ensino Fundamental – anos iniciais, o aluno tenha contato com atividades que façam referência ao reconhecimento e generalizações de padrões em sequências numéricas e não numéricas. Em tais atividades, deve-se limitar a conceitos bem concretos como completar alguns elementos sucessores, construir sucessões a partir de uma lei de formação dada ou expressar com as próprias palavras o padrão observado. É somente no sétimo ano do Ensino Fundamental – Anos Finais que são introduzidas as letras algébricas e uma das formas de apresentá-las é retomar as atividades de reconhecimento e generalizações de sequências e expressar o padrão observado através de expressões algébricas.

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 270)

Tomando-se como referência, as quatro concepções da álgebra colocadas por Usiskin (1995), a BNCC enfatiza a importância de se explorar o essencial de cada uma delas. Deve-se estabelecer a associação entre variável com função e incógnita com equação, além do fato de se ter em mente que o estudo das técnicas de resolução de equações são um meio para chegar à solução de um problema e não o objeto de estudo em si. É de importância maior que o aluno consiga observar uma expressão algébrica e traduzi-la para sua linguagem corrente, apontar a relação de dependência entre as letras etc. Como pode ser observado:

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, [...] pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráfico os e vice-versa. (BRASIL, 2017, p. 271)

Para a parte de álgebra voltada para alunos de sétimo ano (momento em que se começa a trabalhar com as letras algébricas), a BNCC fornece a seguinte tabela em que lista objetos de conhecimentos e associa cada um deles com uma outra lista de habilidades (cada uma com um código próprio) que se deseja desenvolver no aluno.

Quadro 3: Objetos de conhecimento do ensino da álgebra do 7° ano e suas respectivas habilidades.

Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1o grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

fonte: (Brasil, 2018, p. 307)

2.4 Atividades em sala de aula para a introdução de variáveis

Nesta seção, daremos mais atenção nas medidas que os docentes podem tomar em salas de aula que proporcionem um maior entendimento dos alunos sobre o conceito de variável e seus possíveis usos, de acordo com as propostas feitas em alguns estudos citados nesta pesquisa. Pode-se, primeiramente, refletir sobre a distribuição dos conteúdos algébricos que são abordados durante o Ensino Fundamental-anos finais. É fácil perceber que algumas concepções da álgebra são mais exploradas do que outras.

Alguns autores e documentos relatam uma ênfase maior na variável como incógnita e em técnicas estruturais nas aulas de álgebra e apontam tal predileção como sendo algo nocivo à aprendizagem da álgebra, em particular, à aprendizagem do conceito de variável e dos seus diferentes usos. Uma das recomendações do PCN (1998) trata sobre esse assunto.

> É fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no ensino fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações muitas vezes descoladas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para a aprendizagem desses conteúdos. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos. (BRASIL, 1998, p. 117)

Tinoco (2008) comenta sobre a ênfase no desenvolvimento da álgebra estrutural nos currículos escolares do Ensino Fundamental:

> [...] essa é a concepção mais utilizada em salas de aula, sendo mesmo supervalorizada. Essa postura é grande parte das vezes prejudicial aos alunos que, geralmente, não conseguem ver sentido no arsenal de técnicas ensinadas, nem sabem como utilizá-las para abordar situações novas ou mesmo já vivenciadas por ele.(Tinoco, 2008, p.11)

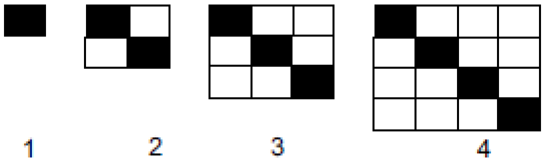
Pensando em propostas para o ensino da álgebra no Ensino Fundamental-anos finais que façam com que o aluno enxergue sentido do uso de variáveis, Souza e Diniz (2008) sugerem que "a álgebra deveria ser apresentada inicialmente, através da relação entre grandezas [...] onde o conceito de variável é absolutamente natural" (Souza e Diniz, 2008, p.5).

Voltando-se ao PCN, além das críticas apontadas, esse documento também sugere possíveis ações e medidas aplicáveis em sala de aula cuja finalidade é contemplar os usos das variáveis algébricas que não recebem a devida atenção.

> Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL,1998, p. 116)

Além da observação de regularidades em tabelas e de gráficos, o PCN também faz uma forte recomendação de atividades que exijam a detecção de regularidades em sequências de figuras (representações geométricas) ou numéricas. Um exemplo de tais sequências também é exibido na figura 1.

Figura 1: Sequência de figuras para o reconhecimento de padrões



(BRASIL, 1998, p. 117)

É de fundamental importância que o professor proponha que os alunos exercitem a habilidade de expressar (de início, verbalmente) a regularidade observada e, com o tempo, construir uma linguagem algébrica capaz de codificar o padrão observado.

Muitos outros trabalhos tais como Souza *et al* (2008), Branco (2008) e Alvarenga e Vale (2007) também usam de atividades de sequências para trabalhar e desenvolver tópicos fundamentais da álgebra escolar.

No trabalho de Alvarenga e Vale (2007), foram aplicados alguns desafios referentes à detecção de padrões em sequências de figuras em turmas equivalentes ao Ensino Fundamental - anos iniciais. Por serem turmas de público mais infantil, o foco dessas atividades foi mais simples: desenvolver o reconhecimento de padrões e regularidades em sequências e expor diferentes formas de expressar tal regularidade. Além de testemunhar e relatar que o objetivo foi atingido, esse trabalho também conseguiu constatar que atividades desta natureza desenvolvem ainda outras habilidades relevantes à álgebra.

> Estes alunos, nas tarefas realizadas, ao procurar generalizar os resultados obtidos depois da descoberta de padrões, estavam a utilizar, de forma compreensiva e em alguns casos implicitamente, conceitos de variáveis e de relações entre essas variáveis, componentes importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (Alvarenga e Vale, 2007, p. 29)

Ribeiro e Cury (2021) também entendem que a inclusão de atividades que envolvam sequências que apresentem algum padrão ou regularidade podem servir de instrumento de introdução ou de maior desenvolvimento da linguagem algébrica. Em seu trabalho, apresenta-se uma lista de atividades desse tipo e recomenda-se a aplicação de algumas, em turmas de Ensino Fundamental - anos finais. A respeito dessas, faz-se o seguinte comentário:

> [...] são bons exemplos de situações nas quais se pode propiciar a construção de conhecimentos matemáticos específicos relativos aos conceitos de função, por exemplo, por meio da generalização de padrões numéricos e geométricos.
> [...] a "generalização de padrões" pode ser uma importante via de acesso e desenvolvimento do pensamento algébrico, tanto nos alunos como nos próprios professores. (Ribeiro e Cury, 2021, p. 96)

Corroborando com os resultados observados, Branco (2008) também aplicou atividades envolvendo sequências padronizadas e constatou seu enorme potencial como ferramenta de consolidação da formação da linguagem algébrica bem como introdução à tópicos algébricos abordados logo em seguida, tais como equações ou equivalência de expressões.

> O estudo de padrões e regularidades contribuiu para a compreensão da linguagem algébrica pelos alunos, que se refletiu no trabalho com equações. Verifiquei que esta abordagem inicial promoveu a compreensão da letra como representando um número. Um outro aspecto também bastante importante para a compreensão da linguagem algébrica foi a análise de expressões equivalentes que representavam a generalização de um mesmo padrão. A simplificação de expressões neste contexto contribuiu para que as operações a realizar tivessem por base situações concretas que lhes davam sentido. (BRANCO, 2008, p.188)

Por todo esse capítulo, primeiramente, foram expostos alguns trabalhos que apontam para a importância de se atribuir categorias para as diferentes formas de uso da variável e tem-se a forma de categorização posta por Usiskin (1995), a principal referência para este trabalho. Foi discutido também sobre o conceito de pensamento algébrico e sua importância para a formação e desenvolvimento da linguagem algébrica. Tal importância é reconhecida pela BNCC e elenca algumas habilidades (a generalização de padrões e a interrelação de grandezas) como sendo essenciais para a compreensão de da álgebra escolar. Por fim, pudemos observar também algumas ideias e orientações sobre possíveis práticas em sala de aula, visando um maior entendimento do aluno sobre os papéis das letras em matemática. Tais ideias corroboram com o que aponta a BNCC sobre o ensino da álgebra. Ou seja, é interessante dar uma maior ênfase no desenvolvimento de habilidades que desenvolvam a detecção de regularidades e o uso das letras algébricas para representar padrões bem como a análise das relações de variáveis entre grandezas. Essas atividades, segundo os autores pesquisados, contribuem para uma maior compreensão dos alunos com as letras algébricas.

Todas as propostas e direcionamentos feitos pelos autores apresentados, servem de base para se desenvolver um olhar mais maduro da álgebra como um todo, refletir sobre o modo atual e corriqueiro de como a introdução das letras algébricas estão sendo abordadas e, assim, elaborar propostas que promovam maior compreensão dos estudantes desse assunto e melhor atendam às demandas da BNCC.

3 METODOLOGIA

Baseando-se em todo o referencial teórico apresentado, esta pesquisa visa, primeiramente, realizar uma pesquisa documental. Nesse tipo de pesquisa, os documentos ou materiais usados como fonte são objetos a serem analisados e descritos, ou seja, "vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa." (Gil, 2002, p.45). É possível elencar algumas vantagens em se adotar esse tipo de metodologia tais como o baixo custo para a execução da pesquisa, o fato de lidar com fontes primárias de dados e de tais fontes serem distantes do observador. Sobre esse último aspecto, Gil (2002) comenta:

> Outra vantagem da pesquisa documental é não exigir contato com os sujeitos da pesquisa. É sabido que em muitos casos o contato com os sujeitos é difícil ou até mesmo impossível. Em outros, a informação proporcionada pelos sujeitos é prejudicada pelas circunstâncias que envolvem o contato. (Gil, 2002, p.45).

Já que o livro didático é uma ferramenta de grande importância tanto para o professor quanto para o estudante, esta presente pesquisa documental tomou como fontes cinco livros didáticos recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático, bastante conhecidos e muito circulados pelas escolas de Ensino Fundamental-anos finais. Os livros usados como fonte incluem as recomendações ao professor, as quais também farão parte da análise. Tal análise se pautará nas orientações e recomendações da BNCC - apresentadas no Capítulo 2 - e trará uma noção da forma que as concepções do uso das letras algébricas estão sendo exploradas.

É também importante lembrar que esta dissertação foi desenvolvida sob os moldes de um mestrado profissional, ou seja, é exigido que um produto final seja apresentado. Para isso , foi utilizado o procedimento técnico da pesquisa bibliográfica, em que tomou-se como base livros e artigos, isto é, tomar-se-á como base os resultados de outros livros e de publicações periódicas. A principal vantagem desse tipo de metodologia é de "permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente." (Gil, 2002, p.44)

Os materiais de referência serão todos os artigos, livros e trabalhos - apresentados também no capítulo 2 desta dissertação - que tratam das formas mais adequadas de se trabalhar e explorar o conceito de variável no Ensino Fundamental - anos finais e, através deles, será possível montar quatro sequências didáticas - referentes a esse assunto - voltadas para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Com isso, tais sequências didáticas servirão como complemento e alternativa às análises críticas dos livros didáticos, feitas na primeira parte da metodologia desta pesquisa.

Para cada sequência didática produzida há, como material principal, uma atividade desenvolvida no Geogebra. O motivo da escolha de tal plataforma é devido ao fato de se tratar de um software livre, fácil interação com a sua interface, além de, em muitos casos, o aplicativo Geogebra já estar instalado nas máquinas de informática das escolas. Tudo isso aumenta as chances das atividades das sequências didáticas serem reproduzidas e aplicadas em diferentes escolas, para diferentes públicos.

4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Já que esse trabalho tem o foco especial na introdução do ensino das letras algébricas, faz-se importante observar e analisar a forma com que os livros didáticos abordam esse assunto. Todos os livros analisados foram recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD da edição de 2020) e são do sétimo ano do Ensino Fundamental- anos finais, cuja edição é 2018 (Quadro 4.1). Em cada livro, a seção analisada abrange os capítulos dedicados às expressões algébricas, com um enfoque particular na apresentação e introdução do conceito de variável. Primeiramente, é apresentada uma descrição detalhada de todo o processo e abordagem utilizados. Em seguida, são realizadas análises e comentários, os quais se baseiam nas recomendações estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No decorrer da análise de cada livro, serão feitas referências aos códigos de algumas habilidades da BNCC. O quadro 3 da seção 2,3 exibe cada código e sua respectiva habilidade e descrição.

Quadro 4: corpus documental da pesquisa

Coleção (7° ano)	Autor(es)	Editorial
A Conquista da Matemática	Giovanni Júnior e Castrucci	4ª edição, 2018, ed. FTD
Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante	3ª edição, 2018, ed. Moderna
Geração Alpha	Carlos de Oliveira e Fugita	2ª edição, 2018, SM
Matemática Convergências	Edwaldo Bianchini	2ª edição, 2018, ed. SM
Matemática Comp.e Prat.	Ênio Silveira	5ª edição, 2018, ed. Moderna

Fonte: baseado nos Dados Estatísticos PNLD 2020.

4.1 Primeiro livro: "A conquista da matemática"

A abordagem dos conceitos de álgebra tem início na unidade 5, no livro do 7° ano da coleção "A Conquista da Matemática". Essa unidade contém oito capítulos: "Sequências", "Expressões Algébricas", "Igualdade", "Equações", "Conjunto Universo e solução de uma equação", "Equações equivalentes", "Equações do 1º grau com uma incógnita" e "Equações na resolução de problemas". O foco da análise será nos dois primeiros capítulos, deixando para os demais comentários mais gerais.

No começo da unidade (figura 2), após uma breve introdução, na qual são apresentados alguns exemplos sobre o uso de variáveis e de incógnitas, o autor opta por utilizar as sequências numéricas como ponto de partida para a compreensão do conceito de variável.

Figura 2: Livro “A conquista da matemática”- Introdução da unidade de álgebra (esquerda) e início do 1° capítulo (direita)

5 LINGUAGEM ALGÉBRICA E EQUAÇÕES

Um dos tipos de atendimento nos restaurantes se dá por meio da modalidade comumente denominada *self-service* (sirva-se) ou venda “a quilo”. Essa modalidade, consideravelmente recente, que conquistou o reconhecimento dos brasileiros, consiste em um restaurante em que os alimentos estão dispostos de maneira que o cliente se serve com a quantidade que desejar. Para entender como funciona um restaurante de venda “a quilo”, observe a cena e responda às questões no caderno.

Em um restaurante de venda a quilo, cada pessoa pode decidir qual alimento e qual quantidade ela quer comer. Isso permite uma alimentação balanceada.

- Como podemos saber a massa somente dos alimentos que colocamos em nossa refeição, sem considerar a massa do prato? Basta medir a massa do prato com a refeição e dela subtrair a massa do prato vazio.
- Considerando que as pessoas que vão a um restaurante não comem a mesma quantidade de comida, é necessário que o valor a ser pago seja representado matematicamente. Você sabe que nome se dá a essa representação? Resposta esperada: equação.
- Para representar o valor a ser pago pela refeição no restaurante apresentado, como você descreveria essa representação e qual seria o resultado dela?
  Para essa representação, se julgar necessário, use:
  P = massa do prato Valor a pagar = 29,89 · (T − P) ou
  T = massa total Valor a pagar = 29,89x, em que x = T − P
  x = massa da refeição

CAPÍTULO 1 SEQUÊNCIAS

Na Matemática, utilizamos as sequências numéricas (ou de figuras), que são aquelas que apresentam números escritos (ou figuras dispostas) em determinada ordem preestabelecida. Cada elemento que compõe uma sequência é denominado **termo**. A ordem em que o termo aparece é a **posição** dele na sequência.

PENSE E RESPONDA Resoluções na p. 306

1. Observe estas sequências:
   I) 3; 0,5; –1; 4
   II) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...
   III) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
   Com base nessas sequências, responda:
   a) Qual sequência apresenta um número finito de elementos? A sequência I.
   b) Observe a sequência II: Anote o resultado da divisão de um termo pelo termo que vem imediatamente antes dele. Depois de escolher outros números e repetir o processo, escreva sua conclusão. Que relação podemos fazer entre um termo e o termo que vem imediatamente antes dele? Pode-se concluir que o resultado obtido é sempre o mesmo; cada termo é o dobro do termo anterior.
   c) Vimos na Unidade 1 que a sequência III se chama sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci foi montada sem uma regra definida como a sequência I ou foi montada com uma regra definida, como a sequência II? Mesmo tipo da sequência II.

SAIBA QUE
Utilizamos as reticências (...) quando queremos indicar que algo continua indefinidamente, ou seja, quando não tem fim.

Sequências como as sequências II e III são chamadas de **sequências recursivas**, enquanto sequências como a sequência I são chamadas de **sequências não recursivas**.

Uma sequência é **recursiva** quando cada termo depende do termo anterior ou de termos anteriores (conhecido o termo inicial).

São exemplos de sequências recursivas:
- 4, 16, 256, 65 536 → o primeiro termo é o número 4 e cada termo seguinte é o termo anterior elevado ao quadrado
- → o primeiro termo é um quadradinho e a cada termo adicionam-se dois quadradinhos, um alinhado acima e um alinhado à direita

As duas sequências que vimos como exemplo possuem uma regra que chamamos de **lei de formação** da sequência.

Fonte: (Giovanni Júnior & José Ruy, 2018, p. 130 e 132)

De início, o livro dedica-se a apresentar as definições formais de sequências, destacando suas principais características, tais como: serem numéricas ou não, terem seus elementos chamados de "termos", seguirem uma ordem preestabelecida e terem uma "posição" para cada termo na sequência.

Em seguida, há uma preocupação em diferenciar as "sequências recursivas" das "sequências não-recursivas", por meio da apresentação de exemplos concretos de cada uma delas.

A seção subsequente (figura 3) é dedicada à determinação do termo geral de uma sequência. Nessa etapa, a preocupação inicial foi estabelecer uma notação em que T_1, T_2, T_3 representam os valores do primeiro, segundo e terceiro termos da sequência, respectivamente. A partir daí a notação é estendida, de modo que T_n apresenta o valor do termo de posição n.

Figura 3: Livro "A conquista da matemática" - Apresentação das formas de se representar os termos de uma sequência.

Termo geral de uma sequência recursiva

Uma sequência recursiva é definida por sua lei de formação, pois é essa lei que determinará como os termos da sequência são calculados.

Veja as situações a seguir.

1 Tomando a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... podemos fazer algumas observações sobre ela: é infinita, é recursiva, o 1º termo dela é 1 e cada termo é igual ao termo anterior multiplicado por 2.

Com base nessas informações, qual o 30º termo dela?

Para responder à pergunta, podemos fazer sucessivas multiplicações até encontrarmos o valor desejado; no entanto, esse seria um processo longo e demorado.

Mas existe outra forma de solucionar essa questão. Usando a lei de formação, podemos encontrar uma fórmula que expresse cada termo, considerando sua posição. Essa fórmula recebe o nome de **termo geral**.

Vamos indicar cada termo de acordo com a sua posição da seguinte maneira: T_1 (1º termo), T_2 (2º termo), T_3 (3º termo), ... T_n (enésimo termo, ou termo geral).

Para essa sequência, note que:

Posição do termo	Valor do termo	Lei de formação
T_1	1	1
T_2	2	1×2
T_3	4	2×2
T_4	8	$4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$
T_5	16	$8 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
T_6	32	$16 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Podemos perceber que cada termo pode ser escrito como uma potência de base 2, sendo:

$$T_1 = 2^0;\ T_2 = 2^1;\ T_3 = 2^2;\ T_4 = 2^3;\ T_5 = 2^4;\ T_6 = 2^5;\ \ldots$$

Notamos também que:

$$T_1 = 2^0;\ T_2 = 2^1;\ T_3 = 2^2;\ T_4 = 2^3;\ T_5 = 2^4;\ T_6 = 2^5;\ \ldots$$

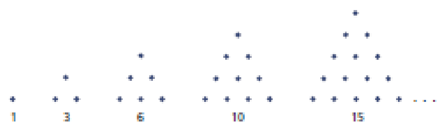
Fonte: (Giovanni Júnior & José Ruy, 2018, p. 133)

A partir daí, é utilizada a notação com letras para observar padrões em exemplos de sequências e formalizar sua generalização.

Em um dos exemplos apresentados, são expostos os valores de T_1, T_2, T_3... e é expresso T_n de forma algébrica, $T_n = 2\text{n} - 1$. Em outro exemplo, são utilizadas sequências de figuras (Figura 4). A busca pelo termo geral segue o mesmo modelo anterior, e chega-se à conclusão de que $T_n = T_{n-1} + \text{n}$

Figura 4: Livro "A conquista da matemática" - Uso de variáveis para representar padrões observados em sequências

2 A sequência de figuras a seguir é denominada **sequência dos números triangulares**, cujas figuras são arranjos de pontos em forma de triângulos. Os números associados a cada uma dessas figuras (um número triangular) correspondente ao número de pontos da figura:



Analisando a formação das figuras, percebemos que a segunda figura tem 2 pontos a mais que a primeira, a terceira tem 3 pontos a mais que a segunda, a quarta tem 4 pontos a mais que a terceira e assim por diante.

Então, temos: $T_1 = 1$ $\quad T_3 = 6 = T_2 + \mathbf{3}$ $\quad T_5 = 15 = T_4 + \mathbf{5}$

$T_2 = 3 = T_1 + \mathbf{2}$ $\quad T_4 = 10 = T_3 + \mathbf{4}$

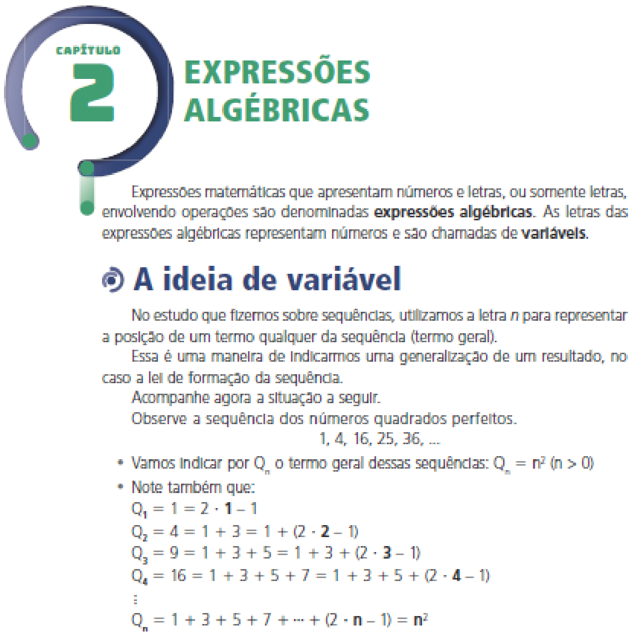
Logo, o termo geral é $\mathbf{T_n = T_{n-1} + n}$, em que n é um número natural e $n > 1$ e $\mathbf{T_1 = 1}$.

Fonte: (Giovanni Júnior & José Ruy, 2018, p. 134)

Tendo como base esses exemplos e toda uma seção de exercícios desse mesmo tipo, é apresentado no próximo capítulo (figura 5) o conceito de expressões algébricas e de variável. Para expressar a forte relação entre esses dois conceitos, o autor usa como exemplo a ideia do termo geral e o descreve como sendo o valor numérico do valor da sua posição na sequência, sendo essa a variável.

Com o mesmo exemplo, questiona-se se é possível saber o valor que a variável terá que assumir para gerar um determinado valor numérico. Neste momento, é apresentado o conceito de incógnita.

Figura 5: Livro "A conquista da matemática" - Apresentação formal da definição de variáveis e de expressões algébricas



CAPÍTULO 2

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Expressões matemáticas que apresentam números e letras, ou somente letras, envolvendo operações são denominadas **expressões algébricas**. As letras das expressões algébricas representam números e são chamadas de **variáveis**.

A ideia de variável

No estudo que fizemos sobre sequências, utilizamos a letra *n* para representar a posição de um termo qualquer da sequência (termo geral).

Essa é uma maneira de indicarmos uma generalização de um resultado, no caso a lei de formação da sequência.

Acompanhe agora a situação a seguir.

Observe a sequência dos números quadrados perfeitos.

1, 4, 16, 25, 36, ...

- Vamos indicar por Q_n o termo geral dessas sequências: $Q_n = n^2$ $(n > 0)$
- Note também que:

$Q_1 = 1 = 2 \cdot \mathbf{1} - 1$

$Q_2 = 4 = 1 + 3 = 1 + (2 \cdot \mathbf{2} - 1)$

$Q_3 = 9 = 1 + 3 + 5 = 1 + 3 + (2 \cdot \mathbf{3} - 1)$

$Q_4 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 3 + 5 + (2 \cdot \mathbf{4} - 1)$

$\vdots$

$Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2 \cdot \mathbf{n} - 1) = \mathbf{n^2}$

Fonte: (Giovanni Júnior & José Ruy, 2018, p. 135)

Nos seis capítulos seguintes, o foco passa a ser as técnicas de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. Ou seja, é apresentado o conceito de igualdade e equivalência de expressões, a definição formal de equação, a apresentação e exploração dos princípios aditivos e multiplicativos em equações. Em seguida, todos esses tópicos são usados para justificar os procedimentos adotados e determinar a raiz de equações do 1° grau. O último capítulo é destinado para modelar situações-problema em equações que foram trabalhadas nos capítulos anteriores.

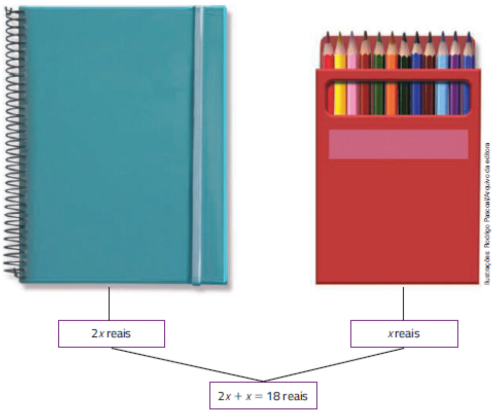
Tomando-se como referência, as concepções da álgebra de Usiskin (1995), tem que as seções reservadas para o desenvolvimento da álgebra generalizadora de padrões e a da álgebra como relação entre grandezas não foram bem desenvolvidas. Os exemplos escolhidos para se começar a introduzir as letras algébricas estão consideravelmente acima do nível teórico esperado de estudantes do 7° ano de uma escola municipal, além da nomenclatura utilizada não favorecer em nada esse processo. É perceptível a omissão de postos-chave, sem os quais a verdadeira compreensão do processo de desenvolvimento e trabalho com as letras fica impossibilitado. O pensamento algébrico envolvendo essas concepções não foi bem desenvolvido.

4.2 Segundo livro: "Teláris"

A introdução aos conceitos de Álgebra começa no capítulo 4, intitulado "Expressões algébricas e equações do 1º grau". Este capítulo é dividido em três seções: "Expressões algébricas", "Equações", "Equações do 1° grau com uma incógnita", nessa ordem. A primeira seção é subdividida em partes, as quais, por se tratarem da forma de apresentação do conceito de variáveis, daremos maior foco.

Já antes da primeira seção, o autor indica que esse conteúdo inicial é voltado para o desenvolvimento da habilidade EF07MA18 da BNCC. A abordagem começa com a apresentação de uma figura retangular cujo perímetro depende das medidas de suas dimensões (figura 6). Após fixar uma das dimensões e permitir que a outra varie, o autor mostra que o valor do perímetro depende apenas da dimensão variável, que é representada pela letra x. A fórmula final para o perímetro é dada por $P = 6 + 2x$. O autor também apresenta outra situação em que compara os preços de um livro e um estojo, utilizando a variável x para representar o preço do estojo. Em seguida, o autor introduz o conceito de equação, acompanhado de três exercícios práticos.

Figura 6: Livro "Teláris" - Introdução do capítulo (esquerda) e o uso de variáveis no processo de formulação de uma equação (direita)



Neste capítulo vamos iniciar o estudo das **expressões algébricas** e das **equações**.

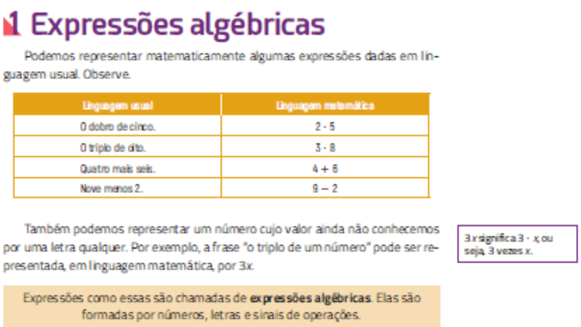
Na situação mostrada na página anterior, temos um terreno retangular com medida de comprimento da largura de 3 metros e medida de comprimento da profundidade de *x* metros. Podemos indicar a medida de perímetro desse terreno, em metros, por $2x + 6$, que é um exemplo de expressão algébrica.

Veja outra situação.

Fonte: (Dante, 2018, p. 94 e 95)

A seguir, o capítulo aborda uma subseção intitulada "Expressões Algébricas" (figura 7), que visa desenvolver habilidades como EF07MA13, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18, de acordo com as recomendações ao professor no rodapé da página. Nesta seção, o livro apresenta as primeiras tentativas de construir expressões algébricas por meio de uma tabela que associa frases em português, como "o dobro de um número", a expressões algébricas correspondentes, como 2x. Essa abordagem continua na próxima seção, onde é apresentado o conceito de "valor numérico de uma expressão algébrica", que é associado a uma máquina que transforma um número em outro, sendo a expressão algébrica o elemento que rege essa transformação.

Figura 7: Livro "Teláris" - Apresentação do conceito de expressões algébricas



1 Expressões algébricas

Podemos representar matematicamente algumas expressões dadas em linguagem usual. Observe.

Linguagem usual	Linguagem matemática
O dobro de cinco.	$2 \cdot 5$
O triplo de oito.	$3 \cdot 8$
Quatro mais seis.	$4 + 6$
Nove menos 2.	$9 - 2$

Também podemos representar um número cujo valor ainda não conhecemos por uma letra qualquer. Por exemplo, a frase "o triplo de um número" pode ser representada, em linguagem matemática, por 3*x*.

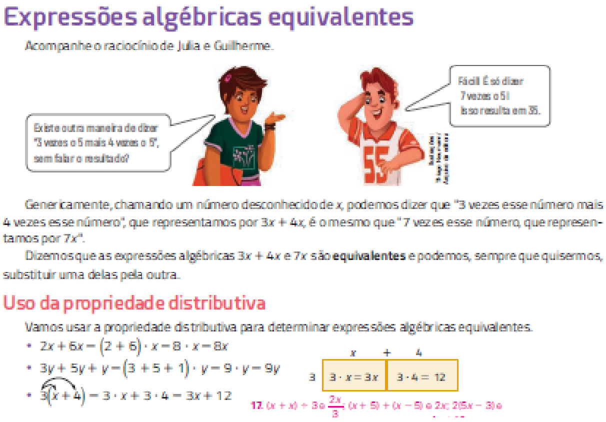
$3x$ significa $3 \cdot x$, ou seja, 3 vezes x.

Expressões como essas são chamadas de **expressões algébricas**. Elas são formadas por números, letras e sinais de operações.

Fonte: (Dante, 2018, p. 96)

Em uma outra subseção (figura 8), dedica-se a explicar o conceito de expressões equivalentes. Para isso, é apresentado um pequeno diálogo a respeito da soma do triplo de um número com o quádruplo desse mesmo número; em que conclui-se que seria equivalente a sete vezes o referido número. Usa-se esse exemplo para estabelecer o princípio de distributividade algébrica.

Figura 8: Livro “Teláris” - Introdução à ideia da propriedade de distributividade em expressões algébricas.


Expressões algébricas equivalentes

Acompanhe o raciocínio de Júlia e Guilherme.

Genericamente, chamando um número desconhecido de x, podemos dizer que "3 vezes esse número mais 4 vezes esse número", que representamos por $3x + 4x$, é o mesmo que "7 vezes esse número, que representamos por $7x$".

Dizemos que as expressões algébricas $3x + 4x$ e $7x$ são **equivalentes** e podemos, sempre que quisermos, substituir uma delas pela outra.

Uso da propriedade distributiva

Vamos usar a propriedade distributiva para determinar expressões algébricas equivalentes.

- $2x + 6x = (2 + 6) \cdot x = 8 \cdot x = 8x$
- $3y + 5y + y = (3 + 5 + 1) \cdot y = 9 \cdot y = 9y$
- $3(x + 4) = 3 \cdot x + 3 \cdot 4 = 3x + 12$

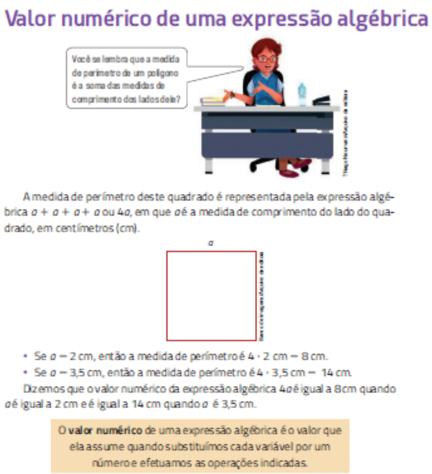
	x	$+$ 4
3	$3 \cdot x = 3x$	$3 \cdot 4 = 12$

17. $(x + x) + 3$ e $\frac{2x}{3}$; $(x + 5) + (x - 5)$ e $2x$; $2(5x - 3)$ e

Fonte: (Dante, 2018, p. 99)

Nas duas partes posteriores dessa primeira seção (figura 9), comenta-se o conceito de “valor numérico de uma expressão” e explora-se a reflexão dos possíveis valores numéricos para o denominador de uma fração algébrica.

Figura 9: Livro “Teláris” - Apresentação do conceito de valor numérico (esquerda) e discussão dos casos de indeterminação em frações algébricas (direita)

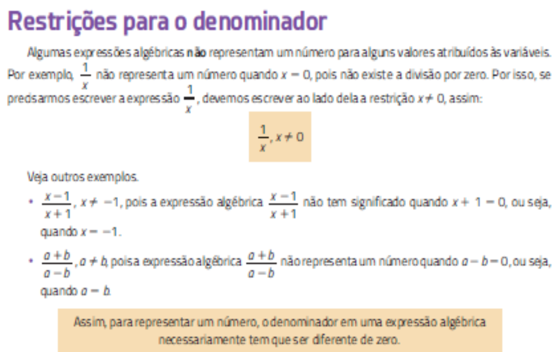

Valor numérico de uma expressão algébrica

A medida de perímetro deste quadrado é representada pela expressão algébrica $a + a + a + a$ ou $4a$, em que a é a medida de comprimento do lado do quadrado, em centímetros (cm).

- Se $a = 2$ cm, então a medida de perímetro é $4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm.
- Se $a = 3{,}5$ cm, então a medida de perímetro é $4 \cdot 3{,}5$ cm $= 14$ cm.

Dizemos que o valor numérico da expressão algébrica $4a$ é igual a 8 cm quando a é igual a 2 cm e é igual a 14 cm quando a é 3,5 cm.

O **valor numérico** de uma expressão algébrica é o valor que ela assume quando substituímos cada variável por um número e efetuamos as operações indicadas.


Restrições para o denominador

Algumas expressões algébricas **não** representam um número para alguns valores atribuídos às variáveis. Por exemplo, $\frac{1}{x}$ não representa um número quando $x = 0$, pois não existe a divisão por zero. Por isso, se precisarmos escrever a expressão $\frac{1}{x}$, devemos escrever ao lado dela a restrição $x \neq 0$, assim:

$$\frac{1}{x}, x \neq 0$$

Veja outros exemplos.

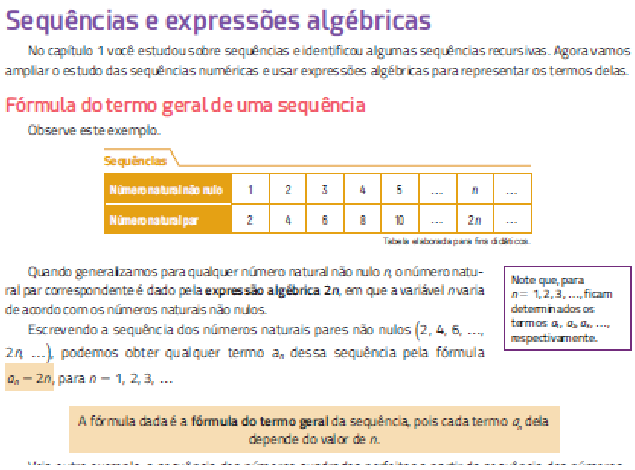
- $\frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$, pois a expressão algébrica $\frac{x-1}{x+1}$ não tem significado quando $x + 1 = 0$, ou seja, quando $x = -1$.
- $\frac{a+b}{a-b}$, $a \neq b$, pois a expressão algébrica $\frac{a+b}{a-b}$ não representa um número quando $a - b = 0$, ou seja, quando $a = b$.

Assim, para representar um número, o denominador em uma expressão algébrica necessariamente tem que ser diferente de zero.

Fonte: (Dante, 2018, p. 100 e 101)

Na última parte dessa seção (figura 10), estuda-se as sequências numéricas e não-numéricas e usa-se tudo o que foi abordado nas seções e partes anteriores para usar a álgebra como ferramenta de descrição de sequências (recorrentes ou não). Essa seção é dividida em duas partes: a primeira tem o título “Fórmula para o termo geral de uma sequência” e, a segunda, “Fórmula de recorrência de uma sequência”. Em ambas as partes, o desenvolvimento da formulação das expressões algébricas se dá de forma rápida, pois os detalhes menores do raciocínio já foram desenvolvidos na seção anterior.

Figura 10: Livro “Teláris” - Apresentação do conceito de sequências.



Sequências e expressões algébricas

No capítulo 1 você estudou sobre sequências e identificou algumas sequências recursivas. Agora vamos ampliar o estudo das sequências numéricas e usar expressões algébricas para representar os termos delas.

Fórmula do termo geral de uma sequência

Observe este exemplo.

Sequências

Número natural não nulo	1	2	3	4	5	...	n	...
Número natural par	2	4	6	8	10	...	$2n$	...

Tabela elaborada para fins didáticos.

Quando generalizamos para qualquer número natural não nulo n, o número natural par correspondente é dado pela **expressão algébrica 2n**, em que a variável n varia de acordo com os números naturais não nulos.

Escrevendo a sequência dos números naturais pares não nulos $(2, 4, 6, ..., 2n, ...)$, podemos obter qualquer termo a_n dessa sequência pela fórmula $a_n = 2n$, para $n = 1, 2, 3, ...$

Note que, para $n = 1, 2, 3, ...$, ficam determinados os termos $a_1, a_2, a_3, ...$, respectivamente.

A fórmula dada é a **fórmula do termo geral** da sequência, pois cada termo a_n dela depende do valor de n.

Fonte: (Dante, 2018, p. 103)

As seguintes seções deste capítulo são dedicadas à apresentação do conceito de equação. Para isso, nas primeiras partes, expõe-se a definição formal de equação, o conceito de incógnita como conjunto universo da solução de uma equação e equações equivalentes. Todos esses tópicos servem de base para apresentar os princípios aditivos e multiplicativos em uma equação e, posteriormente, justificar as técnicas e procedimentos usados para solucionar situações-problemas ou exercícios que exijam a determinação da raiz de uma equação do primeiro grau de uma incógnita, assuntos abordados na terceira e última seção do capítulo.

Ao analisar a abordagem do conceito de variável neste livro didático, percebe-se que a introdução do uso de variáveis foi feita de maneira apressada, isso é, em uma única página (sem nenhum texto de apoio), o autor expõe uma letra algébrica e já realiza operações com ela. Nas seções seguintes, a expansão do estudo sobre a linguagem algébrica é apresentada de forma praticamente impositiva, tornando o conteúdo apenas expositivo. Isso prejudica a compreensão do aluno em relação à nova linguagem algébrica que está sendo introduzida, pois partes-chave do processo de investigação e formação de conjecturas é omitido ou abreviado. Dessa forma, esse livro didático não contempla habilidades recomendadas pela BNCC de forma adequada.

4.3 Terceiro livro: "Geração Alpha"

No livro do 7° ano da coleção Alpha, a parte em que se começa a tratar da Álgebra é na unidade 4, intitulada de "Introdução à Álgebra". Essa unidade é dividida em dois capítulos: "Expressões algébricas" e "Equações", nesta ordem. O primeiro capítulo é responsável por apresentar o uso das letras em álgebra e, portanto, é o foco da nossa análise.

No início desse primeiro capítulo (figura 11), o primeiro exemplo citado pelo autor em que as variáveis podem ser usadas é para o cálculo de estimativa de pessoas em um evento muito grande (como um show ou uma manifestação de rua). Dá-se a informação de que, em um espaço de um metro quadrado, cabem cinco pessoas, aproximadamente, então para se fazer uma estimativa do total de pessoas em todo evento, basta calcular a área que essa multidão de pessoas ocupa. Atribuindo-se à letra A, tal área, pode-se afirmar que a quantidade de pessoas no evento é dado pela expressão $5 \cdot A$. Com esse exemplo, é apresentado o conceito de "expressão algébrica" e o de variável (essa última sem ser mencionada). Além desse exemplo, é dado também outras situações (figura 12) em que se exija montar expressões algébricas lineares simples (sem citar rótulos).

Figura 11: Livro “Geração Alpha” - Parte introdutória do capítulo

Capítulo 1

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Para facilitar a compreensão dos conteúdos deste capítulo, é importante que os alunos dominem as estratégias utilizadas para realizar operações com números naturais, inteiros e racionais. Além disso, o conhecimento adquirido neste capítulo será fundamental para o estudo de equações e de funções.

Introdução às expressões algébricas

Como você faria para determinar a quantidade de pessoas em um evento de grande porte? Seria viável contar pessoa por pessoa? Dependendo do evento, essa seria uma tarefa trabalhosa e demandaria muito tempo.

Existem alguns métodos que possibilitam estimar o tamanho de uma multidão densa. Um deles é o método de Jacobs, que leva o nome de seu criador, Herbert Jacobs (1903-1987). Esse método estima o tamanho de uma multidão, relacionando a quantidade de pessoas por metro quadrado e a área total ocupada por elas.

Após algumas observações, Jacobs concluiu que nas multidões mais densas há cerca de 5 pessoas por metro quadrado. Assim, por exemplo, em uma área de 10 m² haveria 50 pessoas, pois $5 \cdot 10 = 50$. Do mesmo modo, em uma área de 100 m² haveria 500 pessoas, pois $5 \cdot 100 = 500$.

Abaixo, é possível ver uma multidão densa. Carnaval de rua em Belo Horizonte (MG). Foto de 2017.

Fonte: (Oliveira, 2018, p.142)

Figura 12: Livro “Geração Alpha” - Formulação de expressões algébricas para representar a situação posta

Então, sendo A a área ocupada pela multidão, em metro quadrado, podemos estimar a quantidade de pessoas presentes usando a seguinte expressão:

$$5 \cdot A \quad \text{ou} \quad 5A$$

Dizemos que a expressão $5A$ é uma **expressão algébrica**.

Expressões matemáticas formadas por números e letras ou somente por letras são chamadas de expressões algébricas e podem ser usadas para representar diversas situações.

Exemplos

A. Uma pessoa comprou uma dúzia de bananas, três dúzias de uvas e meia dúzia de ovos. Sendo b o preço de uma dúzia de bananas, u o preço de uma dúzia de uvas e h o preço de uma dúzia de ovos, podemos representar o total gasto por essa pessoa do seguinte modo:

$$b + 3u + \frac{1}{2}h$$

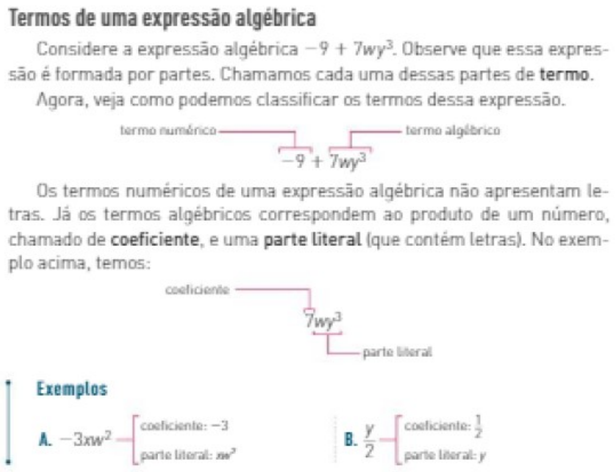
B. Para determinar a diferença entre o dobro de um número x e o triplo de um número n, podemos usar a seguinte expressão algébrica:

$$2x - 3n$$

Fonte: (Oliveira, 2018, p.143)

Em seguida (figura 13), são apresentados nomes mais formais tais como “coeficiente”, “termo algébrico”, “parte literal”, “parte algébrica”. Para toda essa parte inicial, o autor associa o desenvolvimento da habilidade EF07MA13 da BNCC (sabe-se disso, pois está na parte das orientações ao professor, no rodapé de uma das páginas).

Figura 13: Livro “Geração Alpha” - Nomenclatura formal de certos tipos de expressões algébricas



Termos de uma expressão algébrica

Considere a expressão algébrica $-9 + 7wy^3$. Observe que essa expressão é formada por partes. Chamamos cada uma dessas partes de **termo**.

Agora, veja como podemos classificar os termos dessa expressão.

Os termos numéricos de uma expressão algébrica não apresentam letras. Já os termos algébricos correspondem ao produto de um número, chamado de **coeficiente**, e uma **parte literal** (que contém letras). No exemplo acima, temos:

Exemplos

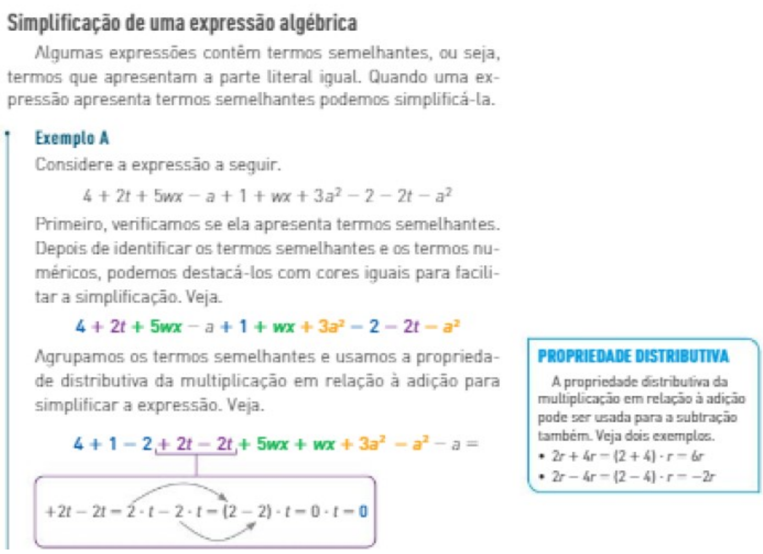
A. $-3xw^2$ — coeficiente: -3; parte literal: xw^2

B. $\frac{y}{2}$ — coeficiente: $\frac{1}{2}$; parte literal: y

Fonte: (Oliveira, 2018, p.144)

Na seção seguinte (figura 14), cujo título é “simplificação de uma expressão algébrica”, é dada uma expressão bem extensa e deve-se identificar os “termos que têm a mesma parte literal”, após isso, somar os coeficientes de acordo com a propriedade distributiva algébrica (tópico esse que é explicado de forma bem rápida em uma observação escrita em uma tabela à direita da página). Quando não há mais termos semelhantes para somar os coeficientes, a expressão final encontrada é chamada de “expressão equivalente à primeira”.

Figura 14: Livro “Geração Alpha” - Redução de termos semelhantes



Simplificação de uma expressão algébrica

Algumas expressões contêm termos semelhantes, ou seja, termos que apresentam a parte literal igual. Quando uma expressão apresenta termos semelhantes podemos simplificá-la.

Exemplo A

Considere a expressão a seguir.

$$4 + 2t + 5wx - a + 1 + wx + 3a^2 - 2 - 2t - a^2$$

Primeiro, verificamos se ela apresenta termos semelhantes. Depois de identificar os termos semelhantes e os termos numéricos, podemos destacá-los com cores iguais para facilitar a simplificação. Veja.

$$4 + 2t + 5wx - a + 1 + wx + 3a^2 - 2 - 2t - a^2$$

Agrupamos os termos semelhantes e usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para simplificar a expressão. Veja.

$$4 + 1 - 2 + 2t - 2t + 5wx + wx + 3a^2 - a^2 - a =$$

$$+2t - 2t = 2 \cdot t - 2 \cdot t = (2 - 2) \cdot t = 0 \cdot t = 0$$

PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

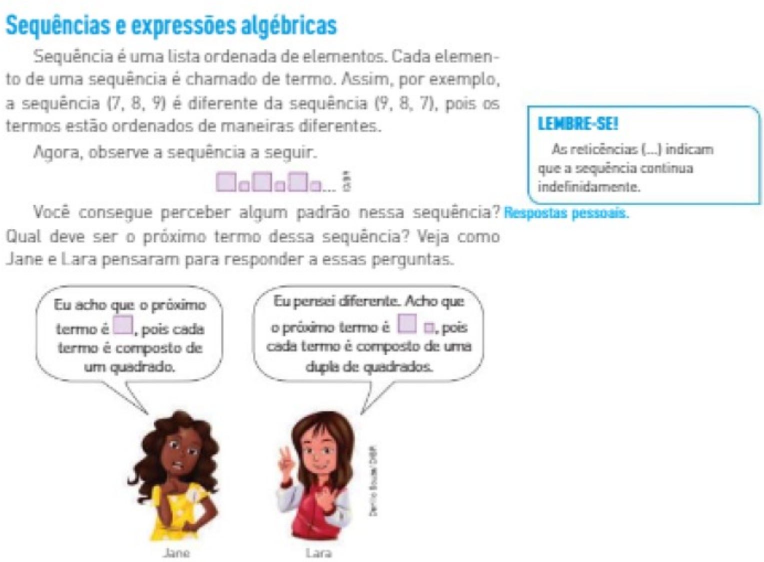
A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pode ser usada para a subtração também. Veja dois exemplos.

- $2r + 4r = (2 + 4) \cdot r = 6r$
- $2r - 4r = (2 - 4) \cdot r = -2r$

Fonte: (Oliveira, 2018, p.145)

Na seção posterior (figura 15), dedica-se a estudar as sequências. Nos rodapés das páginas que contém esse tópico (na parte de orientações ao professor), está escrito que aquela seção se dedica ao desenvolvimento das habilidades EF07MA14, EF07MA15 e EF07MA16 da BNCC. Nessa seção, dá-se uma explicação inicial breve sobre os elementos principais de uma sequência como "termo" e ordenação dos termos. Toma-se, inicialmente, uma sequência de figuras de quadrado cuja lei de formação pode ser descrita por dois pontos de vista diferentes.

Figura 15: Livro "Geração Alpha" - Apresentação do conceito se sequências

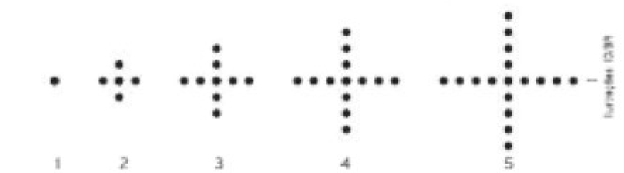


Fonte: (Oliveira, 2018, p.147)

Com a reflexão a respeito do padrão observado, é possível determinar os próximos termos sem precisar listá-los um por um.

Para as próximas sequências, é também explorado os diferentes pontos de vista para o padrão de formação de uma sequência (figura 16), só que há o uso de variáveis como ferramenta de descrição do padrão observado e formulação do termo geral. Nos dois últimos exemplos de sequências, são dadas diferentes expressões para a descrição de formação da mesma sequência e, ao final, conclui-se que se trata de expressões equivalentes.

Figura 16: Livro “Geração Alpha” - Uso de variáveis em sequências



Usando letras na representação de padrões

Vimos que podemos utilizar expressões algébricas para representar diversas situações do dia a dia. Também podemos utilizá-las para representar padrões de sequências. Como exemplo, acompanhe a situação a seguir.

Francisco começou a desenhar uma sequência. Observe:

Como você desenharia a 6ª figura dessa sequência? Qual foi o padrão utilizado por Francisco? Respostas pessoais.

Fonte: (Oliveira, 2018, p.148)

O capítulo 2 desta unidade é dedicado à resolução de equações do 1° grau. Para isso, nas duas primeiras seções, dá-se as definições formais de equação, do que seria a raiz de uma equação, bem como o conjunto solução da mesma. É apresentado também os princípios aditivos e multiplicativos de uma equação. Nas seções posteriores, são apresentadas as técnicas e procedimentos gerais para determinação da raiz de uma equação do 1° grau com uma incógnita e, no final, inicia-se também algumas conjecturas sobre possíveis soluções de equações do 1° grau com duas incógnitas.

Observando todo o processo de abordagem de apresentação dos conceitos iniciais de variáveis que os autores desse livro didático decidiram tomar, percebe-se que a forma adotada de se apresentar as variáveis pela primeira vez ocorreu de forma rápida. Apesar dos problemas e exemplos escolhidos servirem para se iniciar uma discussão, não se teve uma investigação da situação posta usando-se exemplos numéricos, descobrir algum padrão e, assim, utilizar as variáveis como síntese da ideia apresentada. As expressões que modelavam o problema surgiram sem a apresentação do raciocínio usado para se chegar a ela.

A parte que mais se alinha com o que a BNCC recomenda (estimular no aluno o desenvolvimento da linguagem algébrica através de investigações e comparações de diferentes olhares sobre um mesmo problema) é a parte em que se estuda sequências.

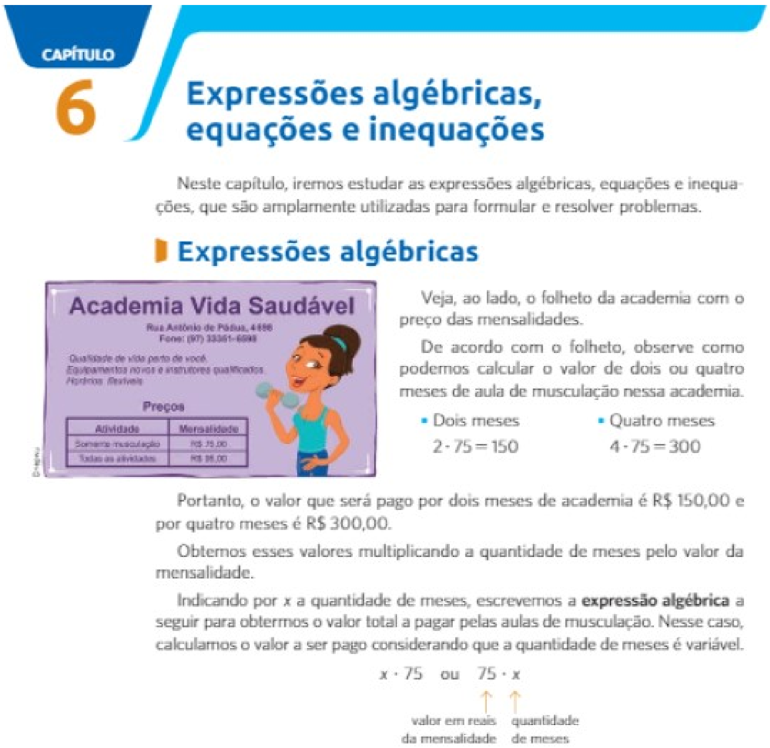
A parte final dessa seção, quando se comenta sobre a formação de expressões algébricas equivalentes, seria uma grande oportunidade para, daí, deduzir a propriedade da distributividade de expressões algébricas. Seria uma forma mais natural e fluida de discutir o tema em relação ao caminho adotado pelo livro.

4.4 Quarto livro: “Convergências”

Na unidade 2 deste livro, os tópicos de álgebra começam a ser abordados no capítulo 6, cujo título é: “Expressões algébricas, equações e inequações”. Esse capítulo se divide em seis seções: “Expressões algébricas”, “Fórmulas”, “Sequências”, “Igualdades”, “Equações” e “Inequações”. Nossa análise recairá nas três primeiras seções, por se tratarem da maneira com o conceito de variáveis é apresentado.

Na seção “Expressões Algébricas” (figura 17), o autor associa o desenvolvimento da habilidade EF07MA13. Para iniciar a discussão, o autor cita o exemplo de uma academia cujo preço mensal é de R$ 75,00. Primeiramente se pergunta qual será o total gasto com essa academia após um determinado número de meses. Após variar a quantidade de meses decorridos, percebe-se que, para calcular o total gasto após certa quantidade de meses, basta multiplicar 75 pelo tempo decorrido (em meses). Daí, formula-se a expressão 75 x para representar o total gasto.

Figura 17: Livro “Convergências” - Introdução ao uso de variáveis



CAPÍTULO 6

Expressões algébricas, equações e inequações

Neste capítulo, iremos estudar as expressões algébricas, equações e inequações, que são amplamente utilizadas para formular e resolver problemas.

Expressões algébricas

Veja, ao lado, o folheto da academia com o preço das mensalidades.

De acordo com o folheto, observe como podemos calcular o valor de dois ou quatro meses de aula de musculação nessa academia.

- Dois meses $2 \cdot 75 = 150$
- Quatro meses $4 \cdot 75 = 300$

Portanto, o valor que será pago por dois meses de academia é R$ 150,00 e por quatro meses é R$ 300,00.

Obtemos esses valores multiplicando a quantidade de meses pelo valor da mensalidade.

Indicando por x a quantidade de meses, escrevemos a **expressão algébrica** a seguir para obtermos o valor total a pagar pelas aulas de musculação. Nesse caso, calculamos o valor a ser pago considerando que a quantidade de meses é variável.

$x \cdot 75$ ou $75 \cdot x$

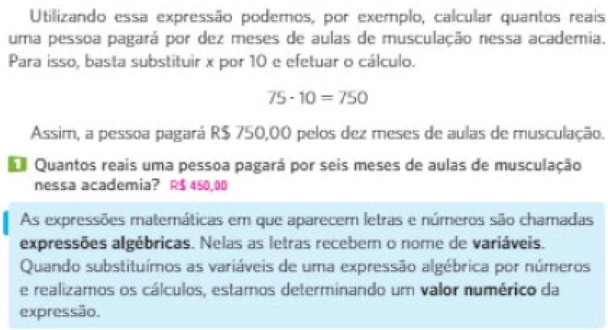
valor em reais da mensalidade

quantidade de meses

Fonte: (Chavente, 2018, p.84)

Através do exemplo dado, o autor usa tal expressão para calcular o total gasto após períodos mais longos e, através dos resultados obtidos, é apresentada as definições de uma expressão algébrica, variável e valor numérico (figura 18).

Figura 18: Livro “Convergências” - Formalização do conceito de variáveis, expressões algébricas e valor numérico



Utilizando essa expressão podemos, por exemplo, calcular quantos reais uma pessoa pagará por dez meses de aulas de musculação nessa academia. Para isso, basta substituir *x* por 10 e efetuar o cálculo.

$$75 \cdot 10 = 750$$

Assim, a pessoa pagará R$ 750,00 pelos dez meses de aulas de musculação.

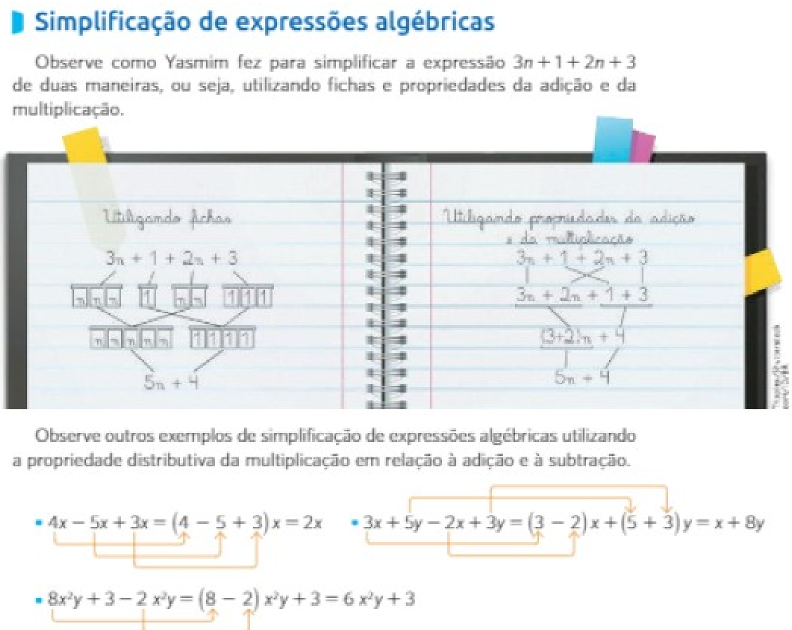
1 Quantos reais uma pessoa pagará por seis meses de aulas de musculação nessa academia? R$ 450,00

As expressões matemáticas em que aparecem letras e números são chamadas **expressões algébricas**. Nelas as letras recebem o nome de **variáveis**. Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e realizamos os cálculos, estamos determinando um **valor numérico** da expressão.

Fonte: (Chavente, 2018, p.84)

A seção seguinte é intitulada “simplificação de sequências algébricas” (figura 19) e, de fato, mostra-se uma expressão extensa e, em seguida, exibe-se dois métodos de simplificação da expressão posta, feitos por uma terceira pessoa. O objetivo era comparar os dois métodos de simplificação e, ao mesmo tempo, apresentar a propriedade da distributividade de expressões algébricas. Depois são dados mais exemplos em que se usa a propriedade distributiva para simplificar expressões algébricas e, no final, tomar a expressão simplificada e defini-la como uma expressão equivalente à que se iniciou.

Figura 19: Livro “Convergências”- Exposição da ideia da propriedade distributiva de uma expressão algébrica



Simplificação de expressões algébricas

Observe como Yasmim fez para simplificar a expressão $3n+1+2n+3$ de duas maneiras, ou seja, utilizando fichas e propriedades da adição e da multiplicação.

Observe outros exemplos de simplificação de expressões algébricas utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

- $4x - 5x + 3x = (4 - 5 + 3)x = 2x$
- $3x + 5y - 2x + 3y = (3 - 2)x + (5 + 3)y = x + 8y$
- $8x^2y + 3 - 2x^2y = (8 - 2)x^2y + 3 = 6x^2y + 3$

Fonte: (Chavente, 2018, p.85)

A seção posterior (figura 20), recebe o título de “Fórmulas”. Nessa, o que é mais explorado é a interdependência entre grandezas. Expõe-se uma fórmula onde se estabelece a relação de uma grandeza - representada por uma letra - com uma determinada operação envolvendo outra grandeza - também sendo representada por outras letra. Além disso, usa-se exemplos numéricos para reforçar a associação presente entre tais letras, tangenciando (sem citar nomes formais) o conceito de função.

Figura 20: Livro "Convergências" - Introdução a fórmulas matemáticas

Fórmulas

Qual é a medida do comprimento do seu pé? Qual é o número do seu calçado? Você sabe qual é a relação entre essas medidas?

Apenas no final do século XIX e início do século XX foram criados o Sistema Ponto Francês e o Sistema Ponto Inglês, que relacionam o número do calçado com a medida, em centímetros, do comprimento do pé, padronizando a numeração dos calçados.

O padrão de medida de calçado utilizado atualmente no Brasil é parecido com o francês, porém, dois pontos a menos. Nesse padrão, o ponto equivale a $\frac{2}{3}$ do centímetro, ou seja, aproximadamente 0,66 cm. Veja a **fórmula** a seguir.

$$N = \frac{5p + 28}{4}$$

N: número do calçado
p: medida do comprimento do pé, em centímetros

Utilizando essa fórmula, vamos determinar o número do calçado de um indivíduo cuja medida do comprimento do pé é 23 cm, por exemplo. Para isso, basta substituirmos a letra p na fórmula por 23.

$$N = \frac{5p + 28}{4} \longrightarrow N = \frac{5 \cdot 23 + 28}{4} = \frac{143}{4} = 35{,}75$$

Arredondando o resultado para o inteiro mais próximo, temos que alguém com um pé de medida de comprimento 23 cm calça um sapato de número 36.

As **fórmulas** são sentenças matemáticas que apresentam, resumidamente, os cálculos que devem ser realizados para se obter um resultado. Nas fórmulas, as letras utilizadas para representar números são chamadas **variáveis**.

Fonte: (Chavente, 2018, p.88)

A próxima seção recebe o título de "Sequências" (figura 21) e o autor a associa ao desenvolvimento da habilidade EF07MA14. Inicialmente, faz-se a definição dos principais componentes de uma sequência: elementos, termos e a importância da ordenação dos seus elementos. Explica-se também a nomenclatura do termo geral a_n.

Figura 21: Livro "Convergências" - Introdução ao conceito de sequências

Sequências

Sequência é uma lista ordenada de elementos (letras, números, figuras, etc.). Esses elementos são chamados **termos**. A sequência $(1, 2, 3)$ é diferente da sequência $(3, 2, 1)$, pois, apesar de serem compostas pelos mesmos termos, estão ordenados de maneira diferente.

As sequências estão presentes em muitas situações do cotidiano como nos exemplos a seguir.

- Nos meses do ano: janeiro, fevereiro, março, ..., novembro, dezembro.
- Nas letras do alfabeto: A, B, C, ..., Y, Z.
- Nos números naturais: $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

Cada um dos termos pode ser representado por uma letra e um número. O primeiro termo é representado por a_1 (lê-se "a, índice 1"), o segundo termo por a_2 e assim sucessivamente, e a_n, em que n é um número natural não nulo, representa um termo qualquer.

As sequências cujos termos são números recebem o nome de **sequências numéricas**. Em nosso estudo, vamos enfatizar as sequências numéricas cujos termos seguem um padrão estabelecido.

Fonte: (Chavente, 2018, p.91)

Para a obtenção e formalização da expressão que representa esse termo geral, tomou-se alguns exemplos de sequências numéricas e um determinado termo podia ser expresso algebricamente em função do seu termo anterior. Em um parágrafo (figura 20), se estende a ideia de recorrência e exibe-se uma expressão do termo geral em função da posição de seu termo.

Figura 22: Livro “Convergências” - Apresentação da ideia do termo geral de uma sequência

> Podemos também determinar os termos de algumas sequências com base na fórmula do termo geral, ou seja, sem recorrer aos termos anteriores. A fórmula $a_n = 2n - 1$, com $n \geq 1$, por exemplo, indica o valor de cada termo a_n da sequência dos números ímpares a partir da posição n que ele ocupa.

Fonte: (Chavente, 2018, p.92)

As seções seguintes são dedicadas a desenvolver e justificar as técnicas de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita. Isto é, na seção de “Igualdades” explora-se os princípios multiplicativos e aditivos sem, porém, mencionar tais nomes. Em “Equações”, dá-se sua definição formal, o conceito de raiz de uma equação, apresenta-se formalmente o princípio aditivo e multiplicativo e, por fim, são apresentados os procedimentos necessários para se determinar as raízes de uma equação do 1° grau com uma incógnita. Na seção final, também são apresentadas e exploradas as técnicas de inequações do 1° grau.

Ao observar todo o processo de abordagem para a apresentação do conceito de variáveis, pode-se perceber que as seções que mais se alinham às recomendações da BNCC, são a parte introdutória e a cujo título era “fórmulas”. A primeira, pois começou com exemplos numéricos até se fazer necessário o uso de letras para a generalização; a segunda explorou a relação entre grandezas e desenvolveu-se a transição de uma linguagem algébrica para a linguagem vernácula.

Na parte em que se aborda a ideia de “expressões equivalentes”, a forma em que se mostrou a propriedade de distributividade algébrica ocorreu de maneira vaga e imposta, sem dar oportunidade ao aluno de desenvolver um raciocínio para concluir o que se deseja. O mesmo problema pode ser percebido ao desenvolver o raciocínio para a formulação do termo geral de uma sequência.

4.5 Quinto livro: “Compreensão e prática”

Na unidade 2 deste livro, no capítulo 6 cujo título é “Linguagem algébrica e regularidades”, começa-se a tratar dos tópicos algébricos. Este capítulo é dividido em quatro seções: “Expressões algébricas”, “Equações”, “Resolução de problemas” e “Sequências”. Por terem o foco na apresentação do conceito de variável, a análise se voltará somente para a primeira seção a qual é dividida em subseções: “Valor numérico de uma expressão algébrica”, “Termos algébricos”, “Adição e multiplicação de termos algébricos”. Todas estas serão descritas em detalhes.

Na subseção “Expressões algébricas”, o autor tem a intenção de desenvolver as habilidades EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16, EF07MA18. Começa-se com duas situações para a reflexão e introdução do assunto. A primeira (figura 23) trata brevemente sobre a história do matemático Leonardo de Pisa – também conhecido como Fibonacci – e o surgimento da sequência conhecida pelo seu nome. Após essa breve explicação, pergunta-se qual é o próximo termo da sequência apresentada e propõe que o aluno escreva com suas palavras, o raciocínio e pensamento utilizado para se responder à pergunta anterior.

Figura 23: Livro “Compreensão e Prática” - Introdução ao capítulo

Fonte: (Silveira, 2018, p. 131)

A segunda situação-problema apresentada (figura 24) é a respeito do cálculo do lucro obtido com uma apresentação de teatro cujo preço por pessoa e infraestrutura do espetáculo tem preço fixo. O lucro, portanto, depende somente do número de pessoas presentes. De início, toma-se exemplos numéricos do quantitativo de pessoas e calcula-se o lucro. Após tais exemplos, propõe-se a formulação de uma expressão que represente o lucro obtido com uma apresentação cujo números de pessoas assistindo é p.

Figura 24: Livro “Compreensão e Prática” - Introdução ao uso de variáveis

Analise a situação a seguir com seus colegas.

Uma companhia teatral organiza diariamente a apresentação de uma peça em uma casa de espetáculos com capacidade para 1 400 pessoas. A infraestrutura da peça e o pagamento dos atores e da equipe custam, diariamente, R$ 25 000,00. O valor do ingresso cobrado na bilheteria é R$ 40,00.

Agora, façam o que se pede.

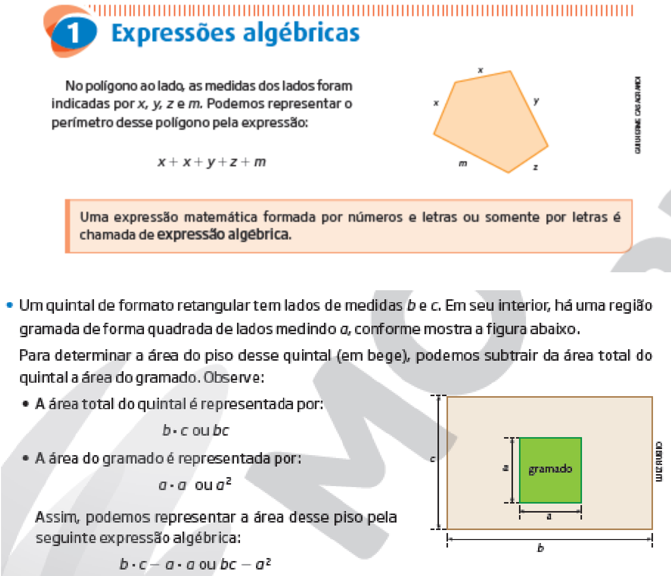
- Que expressão numérica representa o lucro em um dia em que 1200 pessoas foram assistir ao espetáculo? $1200 \cdot 40 - 25000$
- A expressão numérica anterior resulta o valor do lucro obtido com a apresentação. Utilizando uma calculadora, calcule esse valor. 23000 reais
- Se representarmos a quantidade de pessoas que foram assistir à peça pela letra *p*, como poderemos escrever a expressão que resulta o lucro obtido com a apresentação? $p \cdot 40 - 25000$

Neste capítulo, vamos estudar sobre a linguagem algébrica na Matemática e como utilizar símbolos para representar valores desconhecidos na resolução de problemas e na representação de regularidades.

Fonte: (Silveira, 2018, p. 132)

Após a introdução, tem-se a subseção intitulada “expressões algébricas” (figura 25). De acordo com o rodapé dessa página, essa parte é dedicada ao desenvolvimento da habilidade EF07MA13. Começa-se com um problema referente ao valor do perímetro de uma figura geométrica cujos lados são expressos por letras. Rapidamente conclui-se que o perímetro será também uma expressão algébrica representada pela soma de tais letras. Os exemplos seguintes seguem os mesmos moldes: expressa-se a área em função de letras que representam as medidas de suas dimensões. Com isso, a definição de “expressão algébrica” é apresentada.

Figura 25: Livro “Compreensão e Prática” - Formalização do conceito de expressões algébricas



1 Expressões algébricas

No polígono ao lado, as medidas dos lados foram indicadas por x, y, z e m. Podemos representar o perímetro desse polígono pela expressão:

$x + x + y + z + m$

Uma expressão matemática formada por números e letras ou somente por letras é chamada de **expressão algébrica**.

- Um quintal de formato retangular tem lados de medidas b e c. Em seu interior, há uma região gramada de forma quadrada de lados medindo a, conforme mostra a figura abaixo.

  Para determinar a área do piso desse quintal (em bege), podemos subtrair da área total do quintal a área do gramado. Observe:

  - A área total do quintal é representada por:

    $b \cdot c$ ou bc

  - A área do gramado é representada por:

    $a \cdot a$ ou a^2

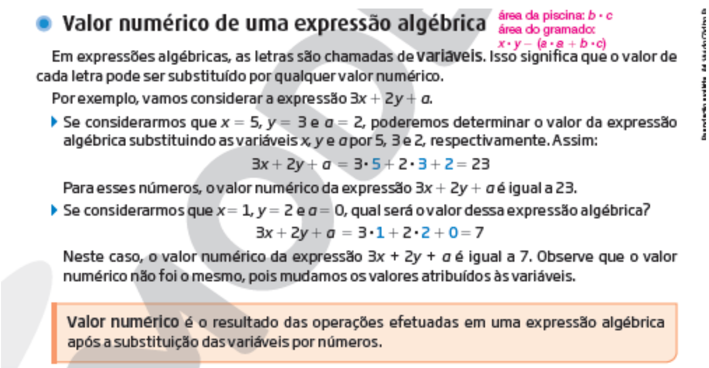
  Assim, podemos representar a área desse piso pela seguinte expressão algébrica:

  $b \cdot c - a \cdot a$ ou $bc - a^2$

Fonte: (Silveira, 2018, p. 133)

Na subseção seguinte (figura 26), apresenta-se a definição de variável e o conceito de valor numérico de uma expressão – quando a variável tem determinado valor fixo. São tomados dois exemplos do dia-a-dia em que os conceitos recém explicados podem ser aplicados. Ambos fazem referência a uma tarifa em que uma parte é um valor fixo a ser pago e a outra, depende de uma segunda grandeza. Exige-se, portanto, o total da tarifa a ser paga, quando a grandeza independente assumir determinado valor.

Figura 26: Livro “Compreensão e Prática” - Formalização do conceito de valor numérico



Valor numérico de uma expressão algébrica

área da piscina: $b \cdot c$
área do gramado:
$x \cdot y - (a \cdot a + b \cdot c)$

Em expressões algébricas, as letras são chamadas de **variáveis**. Isso significa que o valor de cada letra pode ser substituído por qualquer valor numérico.

Por exemplo, vamos considerar a expressão $3x + 2y + a$.

- Se considerarmos que $x = 5$, $y = 3$ e $a = 2$, poderemos determinar o valor da expressão algébrica substituindo as variáveis x, y e a por 5, 3 e 2, respectivamente. Assim:

  $3x + 2y + a = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 23$

  Para esses números, o valor numérico da expressão $3x + 2y + a$ é igual a 23.

- Se considerarmos que $x = 1$, $y = 2$ e $a = 0$, qual será o valor dessa expressão algébrica?

  $3x + 2y + a = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 = 7$

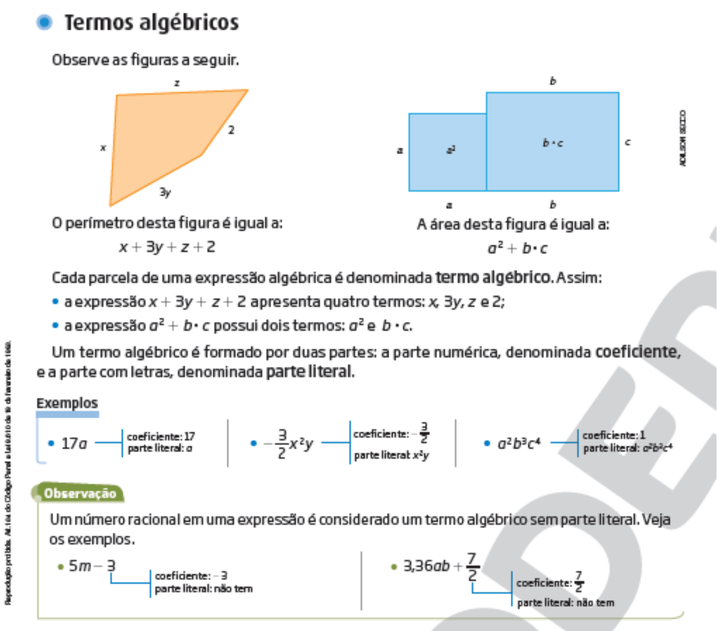
  Neste caso, o valor numérico da expressão $3x + 2y + a$ é igual a 7. Observe que o valor numérico não foi o mesmo, pois mudamos os valores atribuídos às variáveis.

Valor numérico é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica após a substituição das variáveis por números.

Fonte: (Silveira, 2018, p. 134)

Após essa subseção, são dadas outras definições formais tais como “coeficiente”, “monômio”, “parte literal” (figura 27); seguido de outra seção cujo título é “adição e multiplicação de termos algébricos” (figura 28). Nessa parte, tanto a propriedade distributiva de expressões algébricas quanto a operação de multiplicação de monômios são expostas e seguidas de exemplos.

Figura 27: Livro “Compreensão e Prática” - Nomenclatura formal de certas expressões algébricas


Termos algébricos

Observe as figuras a seguir.

O perímetro desta figura é igual a:
$x + 3y + z + 2$

A área desta figura é igual a:
$a^2 + b \cdot c$

Cada parcela de uma expressão algébrica é denominada **termo algébrico**. Assim:
- a expressão $x + 3y + z + 2$ apresenta quatro termos: x, $3y$, z e 2;
- a expressão $a^2 + b \cdot c$ possui dois termos: a^2 e $b \cdot c$.

Um termo algébrico é formado por duas partes: a parte numérica, denominada **coeficiente**, e a parte com letras, denominada **parte literal**.

Exemplos
- $17a$ — coeficiente: 17; parte literal: a
- $-\frac{3}{2}x^2y$ — coeficiente: $-\frac{3}{2}$; parte literal: x^2y
- $a^2b^3c^4$ — coeficiente: 1; parte literal: $a^2b^3c^4$

Observação

Um número racional em uma expressão é considerado um termo algébrico sem parte literal. Veja os exemplos.
- $5m - 3$ — coeficiente: -3; parte literal: não tem
- $3{,}36ab + \frac{7}{2}$ — coeficiente: $\frac{7}{2}$; parte literal: não tem

Fonte: (Silveira, 2018, p. 137)

Figura 28: Livro “Compreensão e Prática” - Operações entre expressões algébricas


Adição e multiplicação de termos algébricos

Adição algébrica

Vamos considerar a figura abaixo, que representa uma quadra de tênis, na qual se tomam como base as dimensões 4 m e 8 m e as variáveis *x* e *y*.

Partida de tênis dos Jogos Olímpicos realizados na cidade do Rio de Janeiro, 2016.

Fonte: (Silveira, 2018, p. 137)

As duas próximas seções (“Equações e resolução de problemas” e “Resolução de problemas”) tem o foco de apresentar de justificar as técnicas de resolução de equações do 1° grau e explorar suas aplicabilidades. Ou seja, inicialmente, é dado a definição de equações bem como a definição de raiz e o conjunto universo desta. Além disso, em seguida, apresenta-se o princípio aditivo e multiplicativo em equações do primeiro grau e como usá-los para obter as raízes. Na seção seguinte, dá-se exemplos de situações-problema que podem ser resolvidas com resolução de equação do 1° grau com uma incógnita.

Na seção intitulada “Sequências”, há a intenção de focar no desenvolvimento da habilidade EF07MA15 e começa-se abordando os conceitos iniciais de sequências: a importância do valor de cada posição da sequência, sequências finitas e infinitas e os termos de uma sequência. Em seguida , passa-se a focar em sequências que têm lei de formação e, após alguns exemplos expositivos de tais sequências, é mostrada uma expressão algébrica que representa a lei de formação dos termos de uma sequência. E, para calcular tais termos, basta descobrir os valores numéricos da expressão quando a variável assume o valor 1, 2, 3, ... , assim por diante. O mesmo procedimento é feito para exemplos de sequências recursivas: é dada uma expressão algébrica e, através dela, calcula-se os valores dos termos de uma sequência.

Ao observar todo o processo de abordagem de apresentação do conceito de variáveis adotado pelo livro, pode-se perceber que, apesar da decisão inicial de tomar situações problemas para investigar um padrão e, assim, proporcionar a exploração da relação de interdependência entre grandezas e uma formulação de uma expressão algébrica que modela todo o processo descrito, a quantidade de exemplos fornecidos foram insuficientes para permitir com que o aluno conseguisse assimilar tal linguagem e a visse como sendo natural ou que fizesse sentido para aquele contexto. Além disso, tanto nas seções de soma e multiplicação de expressões algébricas quanto nas de sequências, não há a oportunidade de o aluno investigar, analisar todos os aspectos da situação proposta para, assim, arriscar possíveis conjecturas. As conclusões foram já expostas prontas, aumentando a distância entre o conteúdo apresentado e o saber e conhecimento do discente.

4.6 Análise geral dos livros apresentados

Como já foi dito anteriormente, as análises e comentários feitos em cada livro se pautam nos direcionamentos apontados pela BNCC para o ensino da álgebra. Assim, procurou-se observar se e como as apresentações dos conteúdos algébricos proporcionam que o aluno consiga “compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas." (BRASIL, 2017, p. 270). Entende-se que essas ideias da BNCC contemplam pelo menos duas concepções da álgebra colocadas por Usiskin (1995), como a álgebra como aritmética generalizada (generalização de uma propriedade, termo geral de uma sequência numérica) e álgebra como o estudo de relações entre grandezas (variação entre duas grandezas). Além destas, a compreensão dos diferentes significados das variáveis numéricas também requer a exploração de situações envolvendo a álgebra como o estudo de procedimentos para resolver problemas (ou a álgebra das equações) e a álgebra como estrutura. Desse modo, entende-se que os apontamentos da BNCC para introduzir a linguagem algébrica no 7o ano corroboram com a importância de se contemplar as diferentes concepções da álgebra.

Com a leitura das análises de cada um dos cinco livros didáticos apresentados, pode-se detectar que, nos capítulos envolvendo álgebra, os tópicos referentes às variáveis como ferramenta de generalização ou como relação entre grandezas, em geral, foram expostos e desenvolvidos sem o devido cuidado aos detalhes. Foram muitas as ocasiões em que, mal se havia surgido a primeira letra algébrica e já a usava para a formulação de expressões nada triviais, sem a devida explicação de todo o processo necessário para se chegar ao resultado ou a conclusão.

Poucas foram as situações-problema sugeridas que permitissem um encadeamento lógico que implicasse o surgimento natural da variável e, posteriormente, a formulação de expressões. Essa constatação corrobora com a visão de Brasil (1998), Tinoco (2008) e Souza & Diniz (2008), a respeito da pouca ênfase dada à álgebra como aritmética generalizada e como relação entre grandezas. Além disso, tal descuido compromete o desenvolvimento do aluno em habilidades exigidas pela BNCC, tais como EF07MA13 e EF07MA15.

5 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Neste capítulo, será apresentado o principal produto da pesquisa aqui relatada. A análise realizada nos livros didáticos do 7° ano (Capítulo 4), nos capítulos que abordam a introdução da linguagem algébrica, contribuiu para ter um panorama de como os conceitos de variável e de incógnita são apresentados. Assim, buscou-se propor um conjunto de atividades de modo a melhorar os pontos críticos levantados. Optou-se por explorar apenas o conceito de variável pelo fato de, em geral, não ser um tópico abordado com o devido cuidado nos livros ou nas salas de aula, dificultando a compreensão do aluno tanto nesse tópico em si quanto em todos aqueles que dependem dele como pré-requisito.

De acordo com a análise dos livros didáticos feitas no capítulo anterior, foi apontado que são pouco exploradas: a álgebra como aritmética generalizada e a álgebra como relação entre grandezas. Com isso, serão apresentadas quatro sequências didáticas com a finalidade de desenvolver a habilidade do aluno em montar expressões algébricas generalizadoras de padrão das quais possa, pelo menos implicitamente, se estabelecer a associação entre duas grandezas. Para cada sequência, são apresentados (além da descrição detalhada da atividade) seus objetivos pedagógicos, seus procedimentos metodológicos e, ao final, tem-se uma ficha técnica das características gerais da sequência.

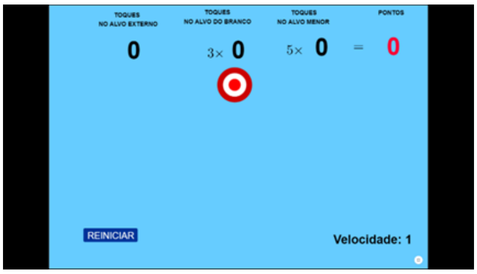
5.1 Sequência didática 1: O jogo do tiro ao alvo

Esta sequência didática tem como material principal, uma atividade digital (disponível em https://www.geogebra.org/m/jxfafxrn) cujo objetivo é a introdução da linguagem algébrica através da exploração da álgebra como generalização da aritmética. Para que todos os alunos possam ter acesso a esta atividade na sala de aula, é necessário o uso de celulares pessoais ou dos computadores disponíveis na escola.

5.1.1 Detalhamento da atividade

A atividade começa apresentando um texto que descreve as regras e a dinâmica do jogo do tiro ao alvo. Esse jogo consta de um alvo de três camadas (“alvo externo - vermelho”, “alvo branco” e “alvo menor - vermelho”) que fica oscilando sua posição aleatoriamente na tela. Quando o usuário consegue clicar em um dos alvos, ganha-se pontos. Ao clicar no alvo externo, ganha-se 1 ponto, no alvo branco, 3 pontos e, no menor, 5 pontos. A quantidade de vezes em que cada alvo foi acertado, bem como a quantidade de pontos obtidos é apresentada na parte superior da tela. À medida que determinada quantidade de pontos é obtida, a velocidade de oscilação do alvo aumenta. A figura 29 apresenta a aparência do jogo mostrada na tela.

Figura 29: Print do jogo do tiro ao alvo, implementado com o Geogebra.



Fonte: do próprio autor.

O estudante é convidado a experimentar o jogo por alguns minutos, observar sua jogabilidade e o funcionamento da dinâmica dos pontos e do aumento da velocidade do alvo. Em seguida, esse mesmo estudante é convidado a responder sete questões que aparecem depois do jogo, as quais fazem referência ao mesmo.

Primeira questão:

Se você acertasse 4 vezes no alvo mais externo, você irá ganhar _______ pontos.
Se você acertasse 5 vezes no alvo mais externo, irá ganhar _______ pontos.
Se você acertasse 6 vezes no alvo mais externo, irá ganhar _______ pontos.
Se você acertasse 8 vezes no alvo mais externo, irá ganhar _______ pontos.
Se você acertasse 10 vezes no alvo mais externo, irá ganhar _______ pontos.

A ordem das respostas para cada espaço em branco acima está na alternativa:

a) 1, 2, 3, 4 e 5
b) 4, 5, 6, 8 e 10
c) 16, 20, 24, 32 e 40
d) 10, 8, 6, 5 e 4
e) 4, 8, 5, 6 e 1

Segunda questão

Se você usar a letra "x" para representar o número de vezes em que se acertou o alvo mais externo, represente (também usando a letra "x") a quantidade de pontos que você irá obter.

Terceira questão

Se você acertasse 1 vez no alvo branco, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 2 vezes no alvo branco, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 3 vezes no alvo branco, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 7 vezes no alvo branco, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 20 vezes no alvo branco, você ganhará _______ pontos.

A ordem das respostas para cada espaço em branco acima está na alternativa:

a) 1, 2, 3, 7 e 20
b) 2, 4, 6 14 e 40
c) 40, 14, 4, 1 e 6
d) 1, 6, 6, 14 e 35
e) 3, 6, 9, 21 e 60

Quarta questão

Se você usar a letra "y" para representar a quantidade de vezes em que se acertou o alvo branco, represente (também usando a letra "y") a quantidade de pontos que você irá obter.

Quinta questão

Se você acertasse 1 vez no alvo menor, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 2 vezes no alvo menor, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 3 vezes no alvo menor, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 5 vezes no alvo menor, você ganhará _______ pontos.
Se você acertasse 15 vezes no alvo menor, você ganhará _______ pontos.

A ordem das respostas para cada espaço em branco acima está na alternativa:

a) 1, 2, 3, 5 e 15
b) 3, 6, 9, 15 e 45
c) 60, 90, 120, 150 e 180
d) 5, 10, 15, 25 e 75
e) 10, 20, 30, 50 e 150

Sexta questão

Se você usar a letra "z" para representar a quantidade de vezes que você acertou o alvo menor, represente (também usando a letra "z") a quantidade de pontos que você irá obter.

Sétima questão

Baseado nas respostas anteriores, se você usar as letras "x", "y" e "z", para representar a quantidade de vezes que você acertou o alvo externo, o alvo branco e o alvo menor, respectivamente, represente (usando também as letras "x", "y", "z") a quantidade total de pontos que você irá obter.

5.1.2 Descrições gerais da atividade

Objetivos

- Investigar, através de exemplos numéricos, o padrão presente para o cálculo da pontuação obtida no jogo do tiro ao alvo.
- Generalizar o padrão observado na etapa anterior e expressá-lo através do uso de variáveis.
- Estabelecer uma interdependência entre a quantidade de pontos obtidos e as quantidades de vezes em que cada alvo foi encostado.

Procedimentos metodológicos.

Aula 1: A primeira aula é destinada ao cumprimento das seguintes etapas:

- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).
- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.
- Acessar a página da atividade pela internet.

Aula 2: Uma vez em que a dupla consiga acessar atividade pela internet, é proposto, inicialmente, que se tente jogar (por alguns minutos) o jogo presente no início dessa página e, com base nele, responder às perguntas que vêm logo em seguida. O professor pode e deve auxiliar na condução do raciocínio e concluir os conceitos e ideias que surgirem através da atividade.

Quadro 5: Ficha técnica da sequência didática "Jogo do tiro ao alvo"

<table>
<tr><th colspan="4">PROPOSTA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1</th></tr>
<tr><td>Título</td><td colspan="3">Jogo do tiro ao alvo</td></tr>
<tr><td>Público alvo</td><td colspan="3">Alunos do 7° ano</td></tr>
<tr><td>Problematização</td><td colspan="3">Não há dúvidas sobre a importância do uso das letras para o estudo e desenvolvimento de várias áreas da matemática, como a álgebra, a geometria analítica, dentro outros. Porém, os diferentes contextos em que as variáveis algébricas são utilizadas, bem como os diferentes papeis que as variáveis assumem nem sempre foram explicitados ou debatidos na educação básica. O que leva os estudantes a confundir variável com incógnita, equação com função, dentre outros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos Gerais</td><td colspan="3">Apresentar a utilidade das variáveis como ferramenta generalização de padrões e formação da linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Conteúdos e Métodos</th></tr>
<tr><th>Aulas</th><th>Objetivos específicos</th><th>Conteúdos</th><th>Dinâmicas</th></tr>
<tr><td>01</td><td>- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).

- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.

- Acessar a página da atividade pela internet.</td><td rowspan="2">Introdução ao uso de variáveis algébricas</td><td>- A turma se organizará em duplas e, seguida cada dupla acessará, via web, a atividade do Geogebra.</td></tr>
<tr><td>02</td><td>- Interagir com a dinâmica proposta na atividade.

- Responder aos exercícios propostos e, por meio desses, conseguir expressar a quantidade de pontos marcados usando variáveis.</td><td>- A dupla terá que explorar a dinâmica proposta pelo applet da atividade e, em seguida, responder às perguntas propostas.</td></tr>
<tr><td>Avaliação</td><td colspan="3">A avaliação consiste em analisar a participação e o envolvimento do aluno com a atividade e com os conceitos trabalhados através dessa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bibliografia</td><td>Referencial Teórico</td><td colspan="2">Tinoco (2011)</td></tr>
<tr><td>Material utilizado</td><td colspan="2">Endereço eletrônico do jogo: https://www.geogebra.org/m/jxfafxrn</td></tr>
</table>

Fonte: do próprio autor

5.2 Sequência didática 2: Velocidade do barco

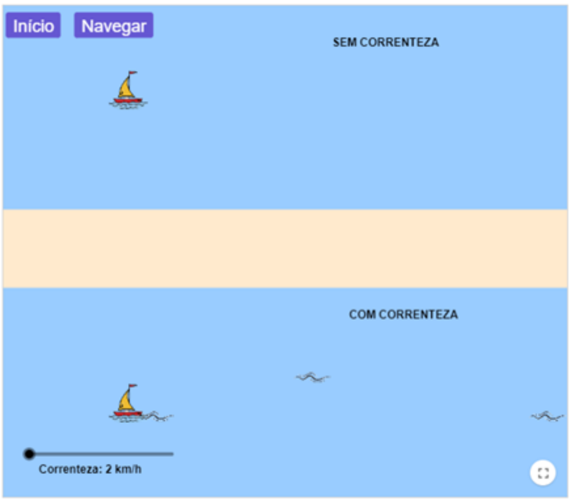
Essa sequência didática tem como material principal, uma atividade digital (disponível em https://www.geogebra.org/m/ecfeqths) cujo objetivo também é a introdução da linguagem algébrica através da exploração da concepção algébrica referente à generalização de padrões. Para que todos os alunos possam ter acesso a esta atividade na sala de aula, é necessário o uso de celulares pessoais ou dos computadores disponíveis na escola.

5.2.1 Detalhamento da atividade

O texto inicial da atividade descreve a situação de dois barcos: um navegando por uma lagoa e outro, por um rio. Somente no rio há correnteza e, nesse caso, o sentido de tal correnteza é contrário ao sentido de navegação do segundo barco. Ambos os barcos são idênticos e, sem correnteza, suas velocidades de navegação são de 8km/h.

O botão de "Navegar" faz com que ambos os barcos percorram um trecho de mesma distância, do início ao fim. Ao completar seus respectivos trajetos, as embarcações ficam paradas na tela e, ao clicar em no botão "Início", cada uma delas volta à sua posição original. Na parte inferior esquerda da tela, há uma barra de rolagem em que se pode controlar a velocidade da correnteza do rio. Na figura 30, há a aparência inicial da tela do applet.

Figura 30: Print da tela inicial do applet no Geogebra.



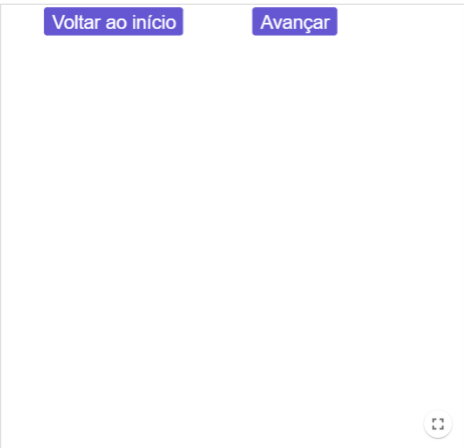
Fonte: do próprio autor

O estudante é convidado a experimentar a dinâmica do applet por alguns minutos, observar a diferença de velocidade dos barcos em função da variação da correnteza e, em seguida, é convidado a ler e responder a um questionário que aparece logo a seguir. Com o intuito de auxiliar na resolução das duas questões propostas, há uma questão extra resolvida em que o estudante pode acompanhar cada etapa da resolução através de um applet. A figura 31 (à esquerda) mostra a aparência inicial desse applet e a cada vez que se aperta o botão "Avançar", avança-se uma etapa da resolução. É o que mostram as figuras 31 (à direita) e 32. Para voltar ao estado inicial da tela, basta pressionar o botão "Voltar ao início".

Exemplo para auxiliar nas respostas das questões propostas

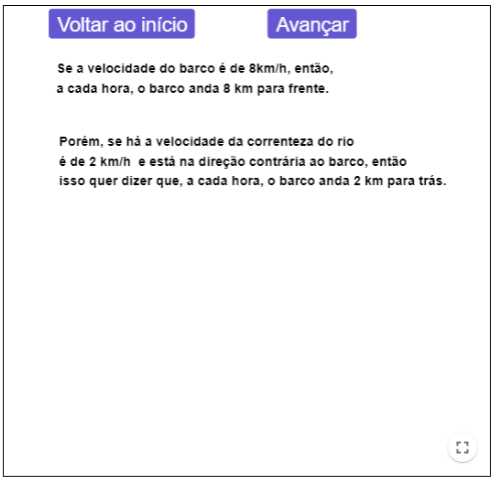
Sabe-se que, sem a correnteza, a velocidade do segundo barco é de 8 km/h. Se a correnteza do rio (contrária ao movimento do barco) tiver velocidade de 2 km/h, qual será a velocidade do barco? Pense e depois veja a resolução abaixo.

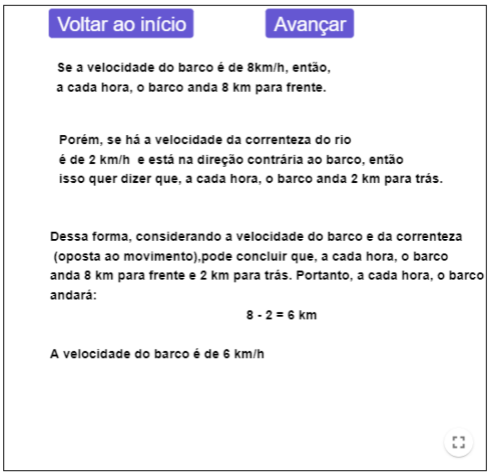
Figura 31: Prints das telas inicial (esquerda) e após se clicar em "avançar" apenas uma vez (direita)



'Fonte: do próprio autor

Figura 32: Prints da tela ao se clicar em “avançar” apenas duas (esquerda) e três vezes (direita)





’Fonte: do próprio autor

Primeira questão:

Baseado no raciocínio usado no item anterior, preencha as lacunas abaixo.

Se a correnteza tiver velocidade de 1 km/h, a velocidade do segundo barco será de ______
Se a correnteza tiver velocidade de 3 km/h, a velocidade do segundo barco será de ______
Se a correnteza tiver velocidade de 4 km/h, a velocidade do segundo barco será de ______

A ordem correta das respostas nos espaços vazios está na alternativa:

a) 1km/h, 3 km/h e 4 km/h

b) 7 km/h, 5 km/h e 4 km/h

c) 6 km/h, 2 km/h e 8 km/h

d) Em todos os casos, a velocidade será de 8 km/h

Segunda questão

Se usarmos a letra "c" para representarmos a velocidade da correnteza, use o raciocínio empregado nos itens anteriores para expressar a velocidade do barco.

5.2.2 Descrições gerais da atividade

Objetivos

Investigar, através de exemplos numéricos, o padrão presente para o cálculo da velocidade do segundo barco. Generalizar o padrão observado na etapa anterior e expressá-lo através do uso de variáveis.

Procedimentos metodológicos.

No caso desta atividade ser aplicada logo após a do "Jogo do tiro ao alvo" (sequência didática 1), não é necessário realizar os procedimentos da "aula 1"; podendo-se assim começar a partir da "aula 2".

Aula 1: A primeira aula é destinada ao cumprimento das seguintes etapas:

- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).
- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.
- Acessar a página da atividade pela internet.

Aula 2: Uma vez em que a dupla consiga acessar atividade pela internet, é proposto, inicialmente, que se tente jogar (por alguns minutos) o jogo presente no início desta página e, com base nele, responder às perguntas que vêm logo em seguida. O professor pode e deve auxiliar na condução do raciocínio e concluir os conceitos e ideias que surgirem através da atividade.

Quadro 6: Ficha técnica da sequência didática "Velocidade do barco"

PROPOSTA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2	
Título	Velocidade do barco
Público alvo	Alunos do 7° ano
Problematização	Não há dúvidas sobre a importância do uso das letras para o estudo e desenvolvimento de várias áreas da matemática, como a álgebra, a geometria analítica, dentro outros. Porém, os diferentes contextos em que as variáveis algébricas são utilizadas, bem como os diferentes papeis que as variáveis assumem nem sempre foram explicitados ou debatidos na educação básica. O que leva os estudantes a confundir variável com incógnita, equação com função, dentre outros.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Gerais</td><td colspan="3">Apresentar a utilidade das variáveis como ferramenta generalização de padrões e formação da linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conteúdos e Métodos</td></tr>
<tr><td>Aulas</td><td colspan="2">Objetivos específicos</td><td>Conteúdos</td><td>Dinâmicas</td></tr>
<tr><td>01</td><td colspan="2">- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).

- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.

- Acessar a página da atividade pela internet.</td><td rowspan="2">Introdução ao uso de variáveis algébricas</td><td>- A turma se organizará em duplas e, seguida cada dupla acessará, via web, a atividade do Geogebra.</td></tr>
<tr><td>02</td><td colspan="2">- Interagir com a dinâmica proposta na atividade.

- Responder aos exercícios propostos e, com a ajuda desses, expressar algebricamente a velocidade do barco usando variáveis.</td><td>- A dupla terá que explorar a dinâmica proposta pelo applet da atividade e, em seguida, responder às perguntas propostas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avaliação</td><td colspan="3">A avaliação consiste em analisar a participação e o envolvimento do aluno com a atividade e com os conceitos trabalhados através dessa.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Bibliografia</td><td>Referencial Teórico</td><td colspan="2">Tinoco (2011)</td></tr>
<tr><td>Material utilizado</td><td colspan="2">- Atividade desenvolvida no Geogebra, disponível em https://www.geogebra.org/m/ecfeqths</td></tr>
</table>

Fonte: do próprio autor

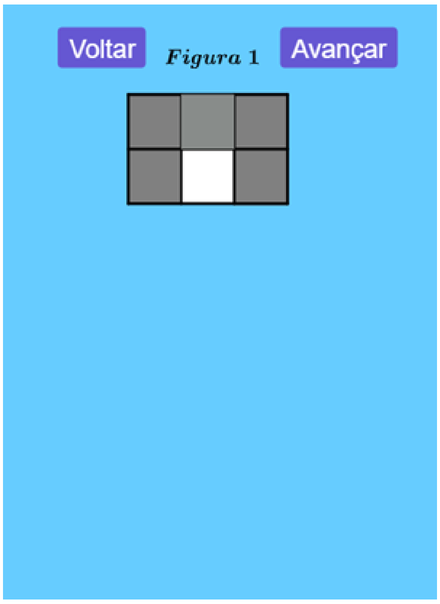
5.3 Sequência didática 3: Sequência de quadrados

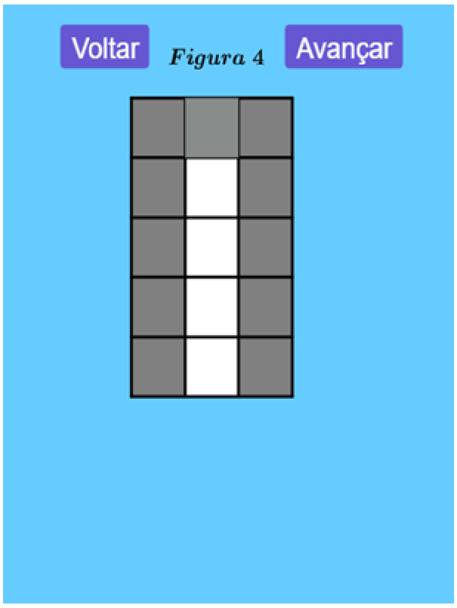
Essa sequência didática tem como material principal, uma atividade digital (disponível em https://www.geogebra.org/m/qgtpsfg9) cujo objetivo é ainda explorar o conceito de variáveis algébricas, usando-as para expressar algebricamente o termo geral de uma determinada sequência. Ou seja, nessa atividade, trabalha-se a concepção da aritmética generalizada e de variáveis que se inter relacionam. Para que todos os alunos possam ter acesso a esta atividade na sala de aula, é necessário o uso de celulares pessoais ou dos computadores disponíveis na escola.

5.3.1 Detalhamento da atividade

O texto inicial desta atividade apresenta a tela inicial do applet, ou seja, dois botões: “Voltar” e “Avançar” e uma figura inicial, intitulada de “figura 1”. É explicado também que, ao apertar em “Avançar”, é apresentada outra figura chamada de “figura 2” e, ao apertar a mesma tecla novamente, aparecerá a “figura 3” e assim por diante. Ocorrerá o processo inverso se for pressionado a tecla “Voltar”. A figura 33 mostra a aparência da tela inicial e a aparência da tela após ter pressionado o botão “Avançar” por três vezes.

Figura 33: Prints da tela inicial (esquerda) e da tela após o botão “avançar” ser pressionado três vezes (direita)





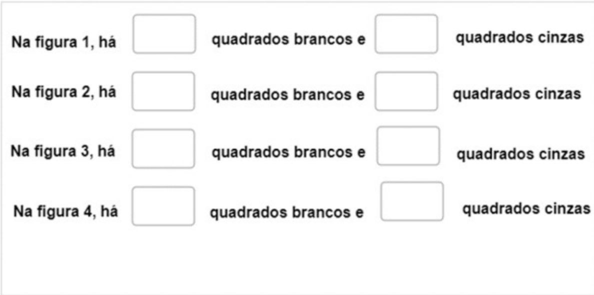
Fonte: do próprio autor

O estudante é convidado a explorar a dinâmica do applet e observar a sequência de figuras formadas. Em seguida, esse mesmo usuário é convidado a responder sete questões que aparecem depois do jogo, as quais fazem referência ao mesmo.

Primeira questão:

Complete as lacunas abaixo:

Figura 34: Print do aplett usado para preencher as lacunas



Fonte: do próprio autor.

Segunda questão:

Você conseguiu perceber alguma relação entre o número da figura e o números de quadrados brancos ou cinzas?

Terceira questão:

Será que é necessário chegar até a figura 20 para descobrir o número de quadrados brancos e cinzas que essa figura tem?

Quarta questão:

Na figura 20, há _______ quadrados brancos.
Na figura 50, há _______ quadrados cinzas.
Na figura 100, há _______ quadrados.

Marque a alternativa que apresenta a ordem correta das respostas que deveriam estar nos espaços em branco:

a) 20, 50 e 100
b) 20, 103 e 123
c) 20, 50, 70
d) 50, 100, 120
e) 30, 80, 130

Quinta questão

Usando a letra "n" para representar o número da figura, represente (usando a letra n) o número de quadrados **BRANCOS** dessa figura.

Sexta questão

Usando a letra "n" para representar o número da figura, represente (usando a letra n) o número de quadrados **CINZAS** dessa figura.

Sétima questão

Usando a letra "n" para representar o número da figura, represente (usando a letra n) o número de **QUADRADOS** dessa figura.

5.3.2 Descrições gerais da atividade

Objetivos

- Investigar, através de exemplos numéricos, a regularidade presente na quantidade de quadrados (brancos e cinzas) à medida que se avança as figuras.
- Generalizar o padrão observado na etapa anterior e expressar algebricamente a quantidade de quadrados (brancos e cinzas) em função do número da figura.
- Estabelecer uma interdependência entre a quantidade de quadrados (brancos e cinzas) da figura e o número dessa figura.

Procedimentos metodológicos.

Aula 1: A primeira aula é destinada ao cumprimento das seguintes etapas:

- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).
- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.
- Acessar a página da atividade pela internet.

Aula 2: Uma vez em que a dupla consiga acessar atividade pela internet, é proposto, inicialmente, que se tente jogar (por alguns minutos) o jogo presente no início dessa página e, com base nele, responder às perguntas que vêm logo em seguida. O professor pode e deve auxiliar na condução do raciocínio e concluir os conceitos e ideias que surgirem através da atividade.

Quadro 7: Ficha técnica da sequência didática “Sequência de quarados”

<table>
<tr><th colspan="4">PROPOSTA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Título</td><td colspan="2">Sequências de quadrados</td></tr>
<tr><td colspan="2">Público alvo</td><td colspan="2">Alunos do 7° ano</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problematização</td><td colspan="2">Não há dúvidas sobre a importância do uso das letras para o estudo e desenvolvimento de várias áreas da matemática, como a álgebra, a geometria analítica, dentro outros. Porém, os diferentes contextos em que as variáveis algébricas são utilizadas, bem como os diferentes papeis que as variáveis assumem nem sempre foram explicitados ou debatidos na educação básica. O que leva os estudantes a confundir variável com incógnita, equação com função, dentre outros.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Gerais</td><td colspan="2">Apresentar a utilidade das variáveis como ferramenta generalização de padrões e formação da linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Conteúdos e Métodos</th></tr>
<tr><th>Aulas</th><th>Objetivos específicos</th><th>Conteúdos</th><th>Dinâmicas</th></tr>
<tr><td>01</td><td>- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).

- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de 71iga-lo e checar o sinal de internet.

- Acessar a página da atividade pela internet.</td><td rowspan="2">Introdução ao uso de variáveis algébricas</td><td>- A turma se organizará em duplas e, seguida cada dupla acessará, via web, a atividade do Geogebra.</td></tr>
<tr><td>02</td><td>Investigar, através de exemplos numéricos, a regularidade presente na quantidade de quadrados (brancos e cinzas) à medida que se avança as figuras.

Generalizar o padrão observado na etapa anterior e expressar algebricamente a quantidade de quadrados (brancos e cinzas) em função do número da figura.

Estabelecer uma interdependência entre a quantidade de quadrados (brancos e cinzas) da figura e o número dessa figura.</td><td>- A dupla terá que explorar a dinâmica proposta pelo applet da atividade e, em seguida, responder às perguntas propostas.</td></tr>
</table>

Avaliação	A avaliação consiste em analisar a participação e o envolvimento do aluno com a atividade e com os conceitos trabalhados através dessa.		
Bibliografia	**Referencial Teórico**	Tinoco (2011)	
	Material utilizado	Atividade desenvolvida no geogebra disponível em https://www.geogebra.org/m/qgtpsfg9	

Fonte: do próprio autor

5.4 Sequência didática 4: Sequência da ponte

Essa sequência didática tem como material principal, uma atividade digital (disponível em https://www.geogebra.org/m/tcsexhce) cujo objetivo pedagógico ainda é expressar algebricamente o termo geral de uma determinada sequência. Explora-se, portanto, a concepção da álgebra como aritmética generalizada bem como o estabelecimento da relação entre grandezas. Para que todos os alunos possam ter acesso a esta atividade na sala de aula, é necessário o uso de celulares pessoais ou dos computadores disponíveis na escola.

5.4.1 Detalhamento da atividade

A parte inicial da atividade mostra um texto e o applet cuja aparência inicial é mostrada na figura 35. No texto, são apresentados os comandos principais, isto é, os botões “Diminuir distância” e “Aumentar distância”, responsáveis por diminuir e aumentar a distância entre os pontos A e B na tela em um metro. A figura 35 mostra a imagem do applet quando se aperta o botão “Aumentar a distância” seis vezes.

Figura 35: Print da tela do aplett do modo inicial (esquerda) e após apertar o botão "avançar" seis vezes (direita).

Fonte: do próprio autor

O estudante é convidado a explorar a dinâmica do applet e observar a variação da distância do ponto A até o ponto B. Em seguida, esse mesmo usuário é convidado a responder quatro questões que aparecem depois do jogo, as quais fazem referência ao mesmo. Nessa atividade, após a primeira questão, há uma questão extra, resolvida, que servirá como modelo de raciocínio para auxiliar o usuário a resolver as questões posteriores.

Para a exibição da resolução dessa questão extra, usa-se outro applet que consta de dois botões: "Voltar ao início" e "Avançar". Esse applet, inicialmente, se encontra em branco, como mostrado na figura 36 (à esquerda). Ao clicar em "Avançar", aparece um parágrafo, explicando a primeira etapa da resolução da questão proposta. Apertando duas outras vezes, aparece a segunda e terceira parte da resolução e, sendo essa última, a parte final da resposta. Ao apertar em "Voltar ao início", a tela volta a ficar branca, podendo ser reiniciado o processo de resolução.

Primeira questão:

Ao aumentar o tamanho da ponte em 1 metro, quantas hastes (a mais) são necessárias?

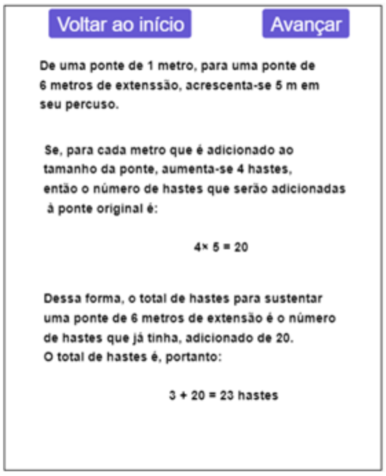
Exemplo para auxiliar nas próximas questões

Pode-se observar que quando a ponte tem 1 metro de extensão, o número de hastes é 3.
É possível saber quantas hastes são necessárias para sustentar uma ponte de 6 metros?
Se sim, informe tal quantidade. Pense e, depois, acompanhe a resolução abaixo:

Figura 36: Print da tela do aplett do modo inicial (esquerda) e após apertar o botão “avançar” uma vez.

Fonte: do próprio autor

Figura 37: Print da tela do aplett após apertar o botão “avançar” apenas duas vezes.



Fonte: do próprio autor

Segunda questão:

É possível descobrir quantas hastes serão necessárias para sustentar uma ponte de 8 metros de extensão? Se sim, responda.

Terceira questão:

É possível descobrir quantas hastes serão necessárias para sustentar uma ponte de 50 metros de extensão? Se sim, responda.

Quarta questão:

Se usarmos a letra "m" para representar o número de metros que essa ponte tem, expresse (através de "m") o número de hastes que serão necessárias para sustentá-la.

5.4.2 Descrições gerais da atividade

Objetivos

- Investigar, através de exemplos numéricos, a regularidade presente na quantidade hastes necessárias para sustentar a ponte a medida em que a extensão da mesma varia.
- Generalizar o padrão observado na etapa anterior e expressar algebricamente a quantidade hastes necessárias para sustentar a ponte em função do comprimento da ponte.
- Estabelecer uma interdependência entre a quantidade de hastes e o comprimento da ponte..

Procedimentos metodológicos.

No caso desta atividade ser aplicada logo após alguma outra sequência didática - apresentada anteriormente-, não é necessário cumprir a primeira etapa metodológica, permitindo-se assim, seguir já da “aula 2”.

Aula 1: A primeira aula é destinada ao cumprimento das seguintes etapas:

- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).

- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.

- Acessar a página da atividade pela internet.

Aula 2: Uma vez em que a dupla consiga acessar atividade pela internet, é proposto, inicialmente, que se tente jogar (por alguns minutos) o jogo presente no início dessa página e, com base nele, responder às perguntas que vêm logo em seguida. O professor pode e deve auxiliar na condução do raciocínio e concluir os conceitos e ideias que surgirem através da atividade.

Quadro 8: Ficha técnica da sequência didática "Sequência da ponte"

<table>
<tr><th colspan="4">PROPOSTA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 4</th></tr>
<tr><td>Título</td><td colspan="3">Sequência da ponte</td></tr>
<tr><td>Público alvo</td><td colspan="3">Alunos do 7° ano</td></tr>
<tr><td>Problematização</td><td colspan="3">Não há dúvidas sobre a importância do uso das letras para o estudo e desenvolvimento de várias áreas da matemática, como a álgebra, a geometria analítica, dentro outros. Porém, os diferentes contextos em que as variáveis algébricas são utilizadas, bem como os diferentes papeis que as variáveis assumem nem sempre foram explicitados ou debatidos na educação básica. O que leva os estudantes a confundir variável com incógnita, equação com função, dentre outros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos Gerais</td><td colspan="3">Apresentar a utilidade das variáveis como ferramenta generalização de padrões e formação da linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Conteúdos e Métodos</th></tr>
<tr><td>Aulas</td><td>Objetivos específicos</td><td>Conteúdos</td><td>Dinâmicas</td></tr>
<tr><td>01</td><td>- A organização dos alunos em duplas bem como da posição de cada dupla na sala (não é aconselhável deixar duas duplas muito próximas).

- No caso do uso de computadores, há de se considerar o tempo para a organização de cada dupla em seus respectivos computadores, bem como todo o processo de ligá-lo e checar o sinal de internet.

- Acessar a página da atividade pela internet.</td><td>Introdução</td><td>- A turma se organizará em duplas e, seguida cada dupla acessará, via web, a atividade do Geogebra.</td></tr>
</table>

		ao uso de variáveis algébricas	
02	Expressar algebricamente (em função de n) a quantidade de hastes necessárias para se construir uma ponte de "n" metros de extensão		- A dupla terá que explorar a dinâmica proposta pelo applet da atividade e, em seguida, responder às perguntas propostas.

Avaliação	A avaliação consiste em analisar a participação e o envolvimento do aluno com a atividade e com os conceitos trabalhados através dessa.	
Bibliografia	**Referencial Teórico**	Tinoco (2011)
	Material utilizado	-Atividade desvolvida no Geogebra, disponível em: https://www.geogebra.org/m/tcsexhce

Fonte: do próprio autor

5.5 Comentários gerais sobre as sequências didáticas

Como já foi enfatizado anteriormente, a finalidade das atividades contidas nas sequências didáticas apresentadas é de desenvolver a habilidade abstrata do aluno para que o mesmo tenha a capacidade de montar e reconhecer expressões algébricas. Tais habilidades equivalem às que constam na BNCC (cujos códigos são EF07MA13 e EF07MA16) e são de grande importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para se atingir essa finalidade, as habilidades se valeram de exercícios que estimulam, primeiramente, o reconhecimento de padrões e, gradualmente, direcionam o estudante ao uso de letras algébricas para a formação de expressões.

Esse procedimento pedagógico segue as ideias dos trabalhos de Souza e Diniz (2008) bem como Tinoco (2011). Neste último, a autora reforça a importância que se tem em adquirir a capacidade de passar um raciocínio matemático da linguagem corrente para a algébrica e também lembra que o momento que o aluno passa a usar as variáveis não surge de forma espontânea. Recomenda-se portanto que "para facilitar essa passagem, o hábito de pensar organizadamente em linguagem corrente é fundamental." (Tinoco, 2011, p. 51).

De acordo com esse ponto de vista, é recomendável atividades que contenham exercícios envolvendo generalização de padrões em que, primeiramente, se explore casos particulares e, após esse momento inicial, surja uma pergunta sugerindo o uso de uma letra para representar uma determinada grandeza. Esse procedimento foi feito em todas as atividades propostas pelas sequências didáticas anteriores e é o fator que mais difere das abordagens adotadas pelos livros didáticos analisados no capítulo 4. Enquanto nas atividades propostas, busca-se desenvolver todo o raciocínio necessário para justificar a formulação das expressões algébricas postas, na grande parte das abordagens adotadas pelos livros didáticos analisados, boa parte do processo de desenvolvimento do pensamento algébrico é abreviado e resumido, restando-se apenas a exposição do resultado final.

Embora as sequências didáticas tenham sido elaboradas para serem aplicadas em turmas do 7° ano do ensino fundamental, tais atividades podem ser aplicadas em turmas de 8° ou 9° anos; uma vez que a habilidade de montar e reconhecer expressões algébricas - em fórmulas ou funções - é algo exigido nos três últimos anos do ensino fundamental.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação desta dissertação de mestrado tem origem na tentativa de buscar soluções para as dificuldades apresentadas em sala de aula pelos estudantes quanto à compreensão e ao uso das variáveis algébricas. Para isso, é preciso ter uma mínima noção de como o conceito de variável é apresentado aos alunos no ensino fundamental e, em seguida, propor práticas e ações em sala de aula que busquem formas alternativas de apresentar, para o discente, o uso das letras algébricas. Traçou-se, portanto, dois objetivos: analisar livros didáticos, recomendados pelo PNLD, cujo foco cai sobre a forma adotada pelo livro quanto à introdução ao uso de variáveis; elaborar um produto educacional que consta de quatro sequências didáticas, com atividades digitais. Na elaboração das atividades, buscou-se por explorar tópicos ou aspectos considerados importantes na análise feita no momento anterior e que não foram adequadamente trabalhados.

Para atingir os objetivos, foi importante realizar uma revisão bibliográfica sobre alguns tópicos que influenciam, de alguma forma, a aprendizagem do aluno na álgebra escolar - com um foco maior nos anos finais do ensino fundamental. A síntese da revisão bibliográfica foi apresentada nos referenciais teóricos. Na primeira parte, foi exposta uma visão mais detalhada sobre as diferentes formas de se conceber a álgebra, em que tomou-se como principal referência para esta pesquisa, as categorias colocadas por Usiskin

(1995). Apresentou-se, portanto, a necessidade de se estabelecer categorias para cada modo distinto de se pensar e usar as variáveis.

O desenvolvimento e de uma ou mais dessas concepções algébricas - bem como todo o raciocínio por trás de suas práticas e combinações - promove o chamado pensamento algébrico. Dessa forma, uma parte do referencial teórico dedica-se a discutir esse conceito e, em seguida, relacioná-lo com as recomendações da BNCC para o ensino da álgebra. Dessa associação, constatou-se a grande importância da exploração do pensamento algébrico para as salas de aula.

A última parte do referencial teórico traz autores que criticam o modo corriqueiro de se distribuir e abordar os diferentes tópicos de álgebra pelos anos finais do ensino fundamental. Tais críticas apontam para certos procedimentos pedagógicos que comprometem consideravelmente o desenvolvimento do pensamento algébrico nas salas de aula. Na maioria dos casos, dedica-se grande parte do tempo na exibição de técnicas de resolução de equações ou em manipulações de expressões, limitando-se o tempo destinado à abordagem das outras concepções algébricas: a formulação de expressões generalizadoras e a análise de variação entre grandezas. Após esses comentários, foram apresentadas propostas e práticas em sala de aula, indicados por algumas pesquisas, que buscam resolver este problema apontado.

Tendo como base todo o material discutido e apresentado no referencial teórico, foi possível adotar uma metodologia que, primeiramente, traçasse um pequeno panorama do modo com que o conceito de variável está sendo abordado. Ou seja, foi feita uma pesquisa documental em que foram selecionados cinco livros didáticos recomendados pelo PNLD (2020) e, a partir dos parâmetros, recomendações e apontamentos da BNCC para o ensino da álgebra e tendo como base as quatro diferentes concepções da Álgebra, colocadas por Usiskin (1995), foi feita uma análise do modo que tais livros apresentavam os conceitos de variáveis, quais foram as primeiras concepções usadas e se a disposição dos conteúdos apresentada permitia ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico. Após a análise dos livros, percebe-se que são poucas as situações-problemas ou oportunidades cujo contexto e os questionamentos apresentados permitem que o aluno se convença da necessidade de se passar a usar variáveis. Tão pouco foi estimulado um raciocínio “passo-a-passo” do processo de formulação de expressões algébricas e, posteriormente, estabelecer relações entre grandezas. Todas estas formas autênticas de se conceber a álgebra foram, na maioria das vezes, apresentadas de maneira meramente expositiva e de forma rápida. Esta constatação corrobora com as críticas apontadas por Tinoco (2008) e Souza *et al* (2008) no ensino da matemática, sobre a tendência dos professores à predileção em gastar grande parte do tempo em sala na resolução de equações e em técnicas manipulatórias e operacionais.

A segunda parte da pesquisa busca propor atividades em sala de aula com uma abordagem distinta às observadas nos livros didáticos. Ou seja, foi feita uma pesquisa bibliográfica em que foram tomados como referência livros, artigos e dissertações de pesquisadores no ensino da álgebra e, a partir desse material, foi possível a montagem e formulação de quatro sequências didáticas cujas atividades propõem a apresentação do conceito de variável - e, posteriormente, o conceito de sequências - a partir da concepção generalizada da aritmética, permitindo-se também a exploração da álgebra como relação entre grandezas. O tipo de abordagem adotada por essas atividades, além de se diferenciar consideravelmente dos exemplos e métodos adotados pelos livros didáticos analisados, também buscam cumprir as demandas e recomendações apontadas pela BNCC para o ensino da álgebra e para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As atividades foram implementadas em uma plataforma de geometria dinâmica e, por isso, é possível uma maior exploração ou interação do estudante com a dinâmica proposta; espera-se que tal interação possa despertar a curiosidade e o espírito criativo. Outra característica importante nestas atividades é explorar o problema ou situação usando exaustivamente os exemplos numéricos com a finalidade de se detectar padrões e, somente nas últimas questões, propõe-se o uso de variáveis para a formulação final de expressões que traduzam o padrão observado. Esse processo dá a oportunidade para que o aluno investigue e conjecture sobre o problema proposto, permitindo com que o mesmo enxergue a passagem da aritmética para a álgebra de forma mais natural. Situações que promovam o pensamento investigativo do estudante estavam em falta na maior parte dos livros analisados, nos capítulos que introduzem o conceito de variável.

Espera-se que, após a realização destas atividades, o aluno seja capaz, além de uma maior compreensão do conceito de variável, também se convencer da utilidade do uso das mesmas como ferramenta de descrição de padrões matemáticos.

É esperado também que esta pesquisa consiga inspirar ou incentivar outros professores a colocarem em prática as propostas de sequências didáticas aqui apresentadas, bem como montar adaptações destas atividades para melhor atender às necessidades de seu próprio contexto em sala de aula. Espera-se também que tais docentes possam refletir sobre a forma rápida e superficial como a álgebra é abordada nos livros didáticos.

À medida que esta dissertação estava sendo elaborada, seu autor se deparava com ideias e apontamentos que nunca lhe ocorrera - concepções distintas da álgebra, atividades de sequências para ensinar variáveis, entre outros. Tudo isso contribuiu para a sua prática profissional, de tal forma que seu olhar sobre a disciplina de álgebra - a qual leciona - mudou completamente. Se tal efeito aconteceu com este autor em específico, espera-se que possa se repetir com outro colega de profissão.

Esta pesquisa não busca resolver ou atender todas as demandas no ensino da álgebra escolar. Há algumas características das atividades propostas apresentadas que podem limitar a sua aplicação em sala de aula. Umas delas é o fato de tais atividades serem feitas pelo computador (há portanto, a necessidade de algum instrumento tecnológico). Outra questão que diz respeito a uma limitação da pesquisa é que não foi possível aplicar as atividades em turmas do 7° ano do ensino fundamental, de modo que não poderemos saber se as atividades atingem o objetivo proposto, se os enunciados estão claros, como seria a reação dos estudantes, entre outros. No entanto, esta limitação aponta para uma possiblidade de continuação da pesquisa. Conclui-se, portanto que novas pesquisas podem ser feitas de forma que se proponham a realizar práticas pedagógicas (digitais ou não) com os alunos do ensino fundamental e que se possa coletar e analisar as reações, impressões e respostas desses mesmos estudantes. Da mesma forma, também é importante se debruçar em outras sequências didáticas ou atividades que busquem abordar as técnicas de resolução de equações do 1° grau (variável como incógnita) e de manipulações algébricas (variável como estrutura) a partir da concepção da álgebra generalizadora da aritmética e da relação entre grandezas. Com isso, espera-se que a pesquisa em tela possa inspirar outras pesquisas acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico.

7 REFERÊNCIAS

ALVARENGA, D.; VALE, I. **A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico**. Quadrante, XV, 1, p. 27-55, Portugal, 2007.

BRANCO, N. C. V.**O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Mestrado em Educação, Área de especialização em Didática da Matemática. Faculdade de Ciências- Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, 2008.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017

BRASIL, **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: MC/SEF, 1998

CHAVANTE, E. R.. **Convergências matemática, ensino fundamental: anos finais: 7° ano**. 2 ed. São Paulo, SM, 2018.

DANTES, L. R. **Teláris matemática**, 7º ano : ensino fundamental, anos finais.3. ed. -- São Paulo :Ática, 2018.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2005.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática : 8° ano : ensino fundamental** : anos finais, 4 ed., São Paulo FTD, 2018.

GIL, A. C.**Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. - São Paulo, Atlas, 2002.

KIERAN, C. **The Core of álgebra: reflexions on its main activities**. In STACEY, K; CHICK, H.; KENDAL, M (Eds.). The future of the teaching and Learning of Algebra: the 12 IMCI Study. Dordrecht: Kluwer, 2004.

OLIVEIRA, C.N.C.; FUGITA, F. **Geração Alpha – Matemática 7°ano** : ensino fundamental, anos finais. SM Educação. 2 ed, São Paulo, 2018

PONTE, J. P.; BRANCO, N. ; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação. 2009.

RANDOLPH, P A.; **The many uses of Algebric Variables**. In: National Council of Teachers of Mathematics. Vol. 85, No. 7 (OCTOBER 1992), pp. 557-561 (5 pages).

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** Coleção tendências em educação matemática, 2 ed, Belo Horizonte, Autentica, 2021

SILVEIRA, E. M. : **Compreensão e prática.** 5. Ed. São Paulo, Moderna, 2018.

sem autor: **THERE AND BACK AGAIN**. Brilliant, Chicago, disponível em: https://brilliant.org/courses/introduction-to-algebra/introduction/pleasure-cruise/2/

SOUZA, E. R.; DINIZ, M.I.S.V. **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. Matemática do ensino fundamental, vol 5. CAEM/IME-USP. São Paulo, 2008.

TINOCO, A. L. **Álgebra: pensar calcular, comunicar...** . Projeto Fundão, 2ed, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis**. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A.P. As ideias da álgebra. Atual edtora, pp. 9-22, 1995.

USISKIN, Z. **Why álgebra is important to learn?**. American educator, 1995.

URSINI, S.; ESCAREÑO, F.; MONTES, D.; TRIGUEIROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa**. México: Trilhas, 2005