



***Explorando a molécula da água
no ensino da matemática***

***Édira Castello Branco de
Andrade Gonçalves***

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Gonçalves, Édira Castello Branco de Andrade
Explorando a molécula da água no ensino da
matemática [livro eletrônico] / Édira Castello
Branco de Andrade Gonçalves, Marcelo Leonardo
dos Santos Rainha. -- 1. ed. -- Rio de Janeiro :
Ed. dos Autores, 2024.

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-01-14444-3

1. Água 2. Matemática - Estudo e ensino
3. Moléculas I. Rainha, Marcelo Leonardo dos
Santos. II. Título.

24-226054

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Profa. Dra. Édira Castello Branco de
Andrade Gonçalves – LabBio/PPGAN/UNIRIO

Prof. Dr. Marcelo Leonardo
dos Santos Rainha – EMAT/UNIRIO



*Para você Gerah,
sempre...*

Genial é um termo pouco usado, devendo melhor ser aproveitado.
Rotina pode ser um grande aprendizado, quando com parcerias inusitadas.
Amigos são semeados e florescem o coração,
Transformando o *Ser* de todas as formas... Como é bom ser um aprendiz!
Intenso, alegre e harmonioso convívio são as lembranças que ficarão,
Do sonho não desvendado em 1980 à realização em 2024.
Ãos caminhos percorridos, os plantios e as colheitas,
O que cada fase ensina e aos que participaram dela, minha eterna *gratidão*

Édira Castello Branco de Andrade Gonçalves

A coisa mais bela que podemos vivenciar é o mistério. Ele é fonte fundamental de toda verdadeira arte e de toda ciência. Aquele que não o conhece e não mais se maravilha, paralisado em êxtase, é como se estivesse morto: seus olhos estão fechados.

Albert Einstein

Ensinar é uma arte, e, arte envolve conhecimento, desenvolvimento, incentivo, comunicação e inspiração. Assim, um licenciado em matemática é responsável por promover em sua sala de aula o conhecimento da matemática em suas mais variadas vertentes, se comunicando com todos e promovendo a educação para todos. Água é vida e está presente em 70% da composição dos organismos vivos. Com o olhar matemático sobre a molécula da água, uma associação direta é com a figura geométrica que representa um triângulo, mas, com a visão filosófica da água, um dos quatro elementos da natureza, associa-se ao icosaedro. No olhar matemático, analisa-se os sólidos de Platão como figuras geométricas e, na visão filosófica se associa à geometria sagrada e, indiretamente à arte, saúde e arquitetura. Com esta perspectiva e a partir da estrutura da molécula da água, exploram-se práticas de ensino que conversam com a geometria, álgebra e grafologia, além de serem indicadas ferramentas associando à arte e geometria sagrada. Estarão sendo apresentadas quatro práticas de ensino envolvendo geometria, três explorando a proporção áurea e três vinculadas à função, além de atividade relacionada à teoria dos grafos. Foi possível observar um extenso universo matemático a ser explorado a partir da molécula de água nos diversos níveis de aprendizagem e como se torna rico o ensino desta ciência a partir de um referencial, inicialmente não associado a mesma. A diversidade em uma sala de aula é um fato, tanto na perspectiva intelectual quanto social, assim, promover atividades que aproximem o aluno do entendimento e interesse na ciência da matemática se torna relevante e urgente visando fortalecimento na formação de nossas crianças e jovens.

Teaching is an art, and art involves knowledge, development, encouragement, communication, and inspiration. Thus, a mathematics graduate is responsible for promoting mathematical knowledge in its various forms within the classroom, communicating with everyone, and promoting education for all. Water is life and constitutes 70% of the composition of living organisms. With a mathematical view of the water molecule, a direct association is made with the geometric figure that represents a triangle, but with the philosophical view of water, one of the four elements of nature, it is associated with the icosahedron. From the mathematical perspective, Platonic solids are analyzed as geometric figures, while from the philosophical perspective, they are associated with sacred geometry and, indirectly, with art, health, and architecture. With this perspective, and based on the structure of the water molecule, teaching practices are explored that connect with geometry, algebra, and graphology, along with recommended tools associating art and sacred geometry. Four teaching practices involving geometry will be presented, three exploring the golden ratio, and three related to functions, in addition to an activity related to graph theory. It was possible to observe an extensive mathematical universe to be explored from the water molecule at various learning levels and how rich the teaching of this science becomes when starting from a reference not initially associated with it. Diversity in the classroom is a reality, both intellectually and socially, and therefore, promoting activities that bring students closer to understanding and interest in the science of mathematics becomes relevant and urgent, aiming at

strengthening the education of our children and young people..

INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 1: CONHECENDO A ÁGUA	18
1. Química da água	18
2. Explorando geometria com a molécula da água	21
CAPÍTULO 2: PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO POLIEDROS E A MOLÉCULA DA ÁGUA	25
1. Explorando a molécula de água no ensino da geometria a partir do método de Van Hiele	25
2. Identificando a figura geométrica associado ao estado físico da água líquida a partir do método de Van Hiele	30
3. Explorando as faces poligonais do tetraedro, prismas pentagonal e hexagonal a partir da interação entre moléculas da água	34
4. Identificando a figura geométrica associado ao estado físico da água sólida a partir do método de Van Hiele	39
CAPÍTULO 3: OS SÓLIDOS DE PLATÃO E A MOLÉCULA DA ÁGUA E AS ARTES	44
CAPÍTULO 4: PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO PROPORÇÃO ÁUREA	53
1. Construindo o retângulo áureo	53
2. Aplicando a proporção áurea na divisão harmônica do espaço	57
3. Analisando Eletrocardiograma (ECG) a partir da proporção áurea	60
CAPÍTULO 5: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA E A GEOMETRIA SAGRADA	62
CAPÍTULO 6: SOLUBILIDADE DA ÁGUA E SUA RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA	65

CAPÍTULO 7: PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO	69
DISSOLUÇÃO EM ÁGUA	
1. Conhecendo a dissolução da sacarose em água na temperatura ambiente	69
2. Conhecendo a dissolução da sacarose em água aquecida	75
3. Conhecendo a dissolução do NaCl em água	79
CAPÍTULO 8 - A MOLÉCULA DE ÁGUA E A TEORIA DOS	
GRAFOS	83
CONCLUSÃO	90
REFERÊNCIAS	94

INTRODUÇÃO

Repensar o processo de ensino, no âmbito da educação brasileira se faz necessário não somente pelas mudanças e desenvolvimento mundiais, mas também em função dos resultados negativos associados aos estudantes brasileiros, em avaliações internas e externas como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (Ribeiro Resende e Limírio Brigagão, 2023).

No mundo atual, as mudanças são intensas e dinâmicas e o ambiente de ensino deve estar preparado para aceitar estas modificações, considerando a escola como uma instituição responsável pela formação de crianças e adolescentes, não sendo possível fugir da interação do universo digital (Santos *et al.*, 2023), que pode ser explorado, a favor do ensino da matemática, sob diversas óticas. Na perspectiva de mudanças, deve-se ter em mente a produção de uma educação crítica, que não deve ser alheia aos problemas sociais e, no âmbito da Educação Matemática Crítica é necessário ter o olhar para o conhecer matemático, o conhecer tecnológico e o conhecer reflexivo (Moura e Nunes, 2023; Silva, Da, Souza Couto e Cunha Júnior, 2020).

H 20

O pensamento é um constructo multidimensional, envolvendo raciocínio dedutivo e intuitivo visando obter um resultado, a partir de diferentes ações: questionamento da fonte de conhecimento, validação das informações e sua confiabilidade, propondo, enfim, resoluções para o problema ou atividade específica (Fonseca e Gontijo, 2021). O conhecimento é subconjunto do saber, contém a ciência e estabelece as relações entre ordem, desordem, interação e reorganização envolvendo todas as atividades de um sistema (Santos, Braga e Espírito Santo, 2021) e, nesta perspectiva, o olhar analítico, filosófico e social, propiciam resoluções criativas aos diferentes desafios.

O pensamento geométrico é construído a partir do pensamento intuitivo, observando e analisando propriedades do mundo material, desenvolvendo atividade prática (experimentação) e levando a descoberta das verdades geométricas (demonstração) (Boldrini e Gazire, 2018). O pensamento algébrico deve ser estabelecido considerando os pilares construir, compreender e trabalhar e não um aprendizado mecanizado (Lima, de, Santos, dos e Santos, dos, 2021).

A palavra geometria, certamente leva ao leitor ao mundo matemático, considerando que *Geometria*, em grego clássico: *γεωμετρία*; geo- "terra", -metria "medida", é um ramo da matemática vinculado a medidas de corpos e propriedades dos espaços (Flórida: Wikimedia Foundation, [s.d.]). Já, ao ouvir geometria sagrada, a associação com a matemática poderá não ocorrer. Há uma relação entre a matemática, medicina e alquimia, registrada ao longo da humanidade, promovendo assim, entre Idade Média e inícios da Idade Moderna, a divulgação da matemática com natureza sagrada, por estar presente na constituição de tudo, ser necessária aos processos de purificação de metais, do corpo e da alma humanos (Brito e Dalcin, 2023). Peter Lenz (1832-1928), artista alemão desenvolveu uma teoria da geometria mística baseada na reconstrução da linguagem de Deus para criação do mundo, com três componentes básicos o quadrado = Pai, o triângulo = Sol e a circunferência = Espírito Santo, em conjunto, encontrado no templo Doric, no Parque Guell (Barcelona/Espanha), expressando a divindade (Rius Santamaria, 2020) e em crenças religiosas como Rosa Cruz, Maçonaria e movimento New Age associando uma natureza sagrada

H 20

à matemática (Brito e Dalcin, 2023). Ao ouvir a associação da geometria com o sagrado, para muitos a matemática não ocorre e para outros, a geometria sagrada é o vínculo entre o mundo humano com o mundo divino, por meio de proporções e relações harmoniosas, como a representação das 4 dimensões (Lambda de Platão), ponto (dimensão zero), linha (uma dimensão), plano (2 dimensões) e sólido (três dimensões)(Silva, De e Amarakoon, 2020). Não cabe aqui uma proposta para discutir as diversas compreensões a respeito da natureza sagrada da matemática, mas, indicar alternativas para o estudo da geometria básica, explorando percepções técnico científicas e culturais, ampliando a aplicação e abordagem desta ciência pode ser um caminho interessante para responder uma questão: “Geometria sagrada... Tem espaço no ensino da matemática?”

A água é essencial à vida e, normalmente, esta substância é estudada associada às ciências biológicas e a química. Quando se explora a água nas ciências humanas, uma visão básica de sustentabilidade é facilmente reconhecida, mas, além desta, os grandes filósofos a analisavam, direta ou indiretamente, no

conhecimento do Universo. No ensino da matemática explora-se vinculado ao desperdício (Fontana e Sagava, 2024) ou ainda em ação interdisciplinar (Silva, Bittencourt e Guzzo, 2024).

A água tem seus mistérios e tudo que envolve o sagrado também está envolvido em mistérios. Assim, aqui está sendo proposto compreender a água com o olhar de quem quer desvendar os mistérios que a envolvem na natureza, perceber a relação direta ou indireta na geometria sagrada, e, explorando estes caminhos, promover o ensino da matemática com uma visão crítica, histórica, cultural e reflexiva.

Estarão sendo apresentadas práticas de ensino associadas à geometria, elaboradas a partir do método de Van Hiele, práticas de ensino envolvendo a proporção áurea, proporção, porcentagem e funções e, ainda atividade explorando a teoria dos grafos, todas vinculadas direta ou indiretamente a estrutura e propriedades da água aplicando diferentes ferramentas digitais, impressas em 3D e material concreto simples.

Entendendo que o professor em suas atividades de ensino tem liberdade e autonomia para adaptar, ampliar e restringir práticas de ensino, acredita-se que o material aqui elaborado, pode ser adaptado para todos os anos dos ensinos fundamental e médio, certamente podendo ser mais detalhadamente explorado quando em parceria com os ensinos das ciências e com a química.

CAPÍTULO 1 – CONHECENDO A ÁGUA

1. QUÍMICA DA ÁGUA

Considerada como um dos 5 elementos do universo, a água é tida como um símbolo sagrado que conduz a vida.... (autor, 2024)

A água é uma molécula química composta de 1 átomo de hidrogênio (H) e 2 átomos de oxigênio (O) que estão ligados entre si através de ligações covalentes (Andrade, 2015). O átomo de oxigênio atrai os elétrons compartilhados das ligações covalentes em uma extensão significativamente maior do que os átomos de hidrogênio, assim o átomo de oxigênio adquire uma carga negativa parcial (δ^-), enquanto os átomos de hidrogênio adquirem uma carga positiva parcial (δ^+), propiciando atração entre as moléculas por pontes de hidrogênio (Figura 1) resultando em uma estrutura geométrica similar ao tetraedro no caso da água na forma líquida (Figura 2) (LibreTexts Chemistry, 2024).

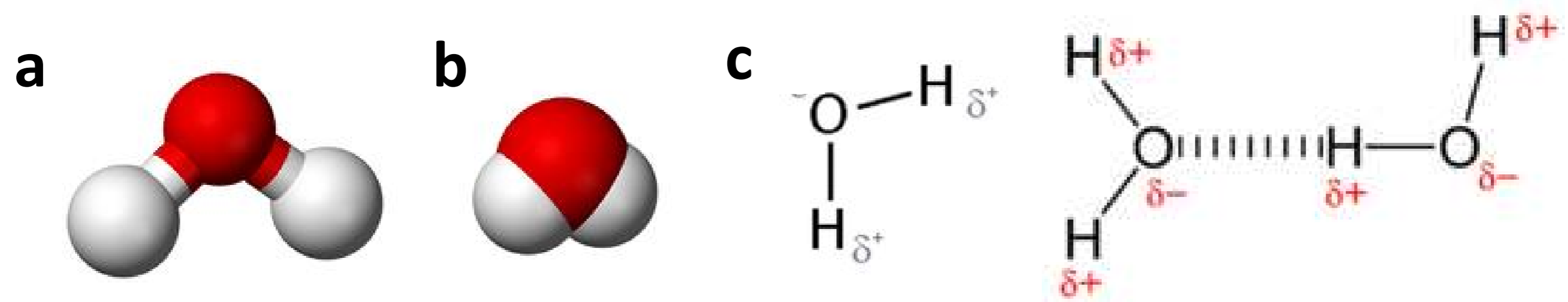


Figura 1 – Molécula de água: a) modelo de bola e vara; b) modelo preenchimento do espaço; c) estrutura molecular com cargas parciais; d) ponte de hidrogênio, atração entre oxigênio e hidrogênio entre moléculas de água (LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

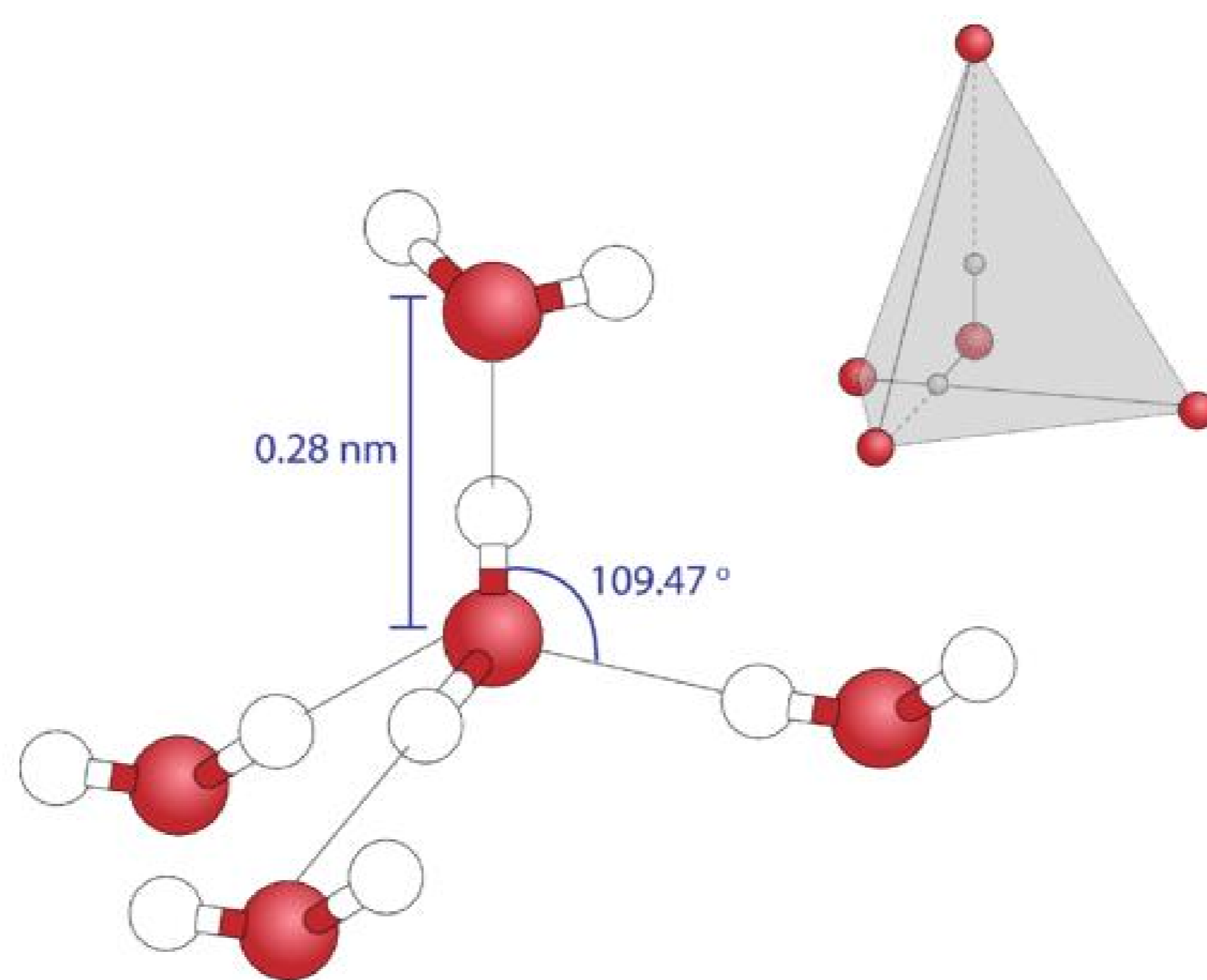


Figura 2 – Estrutura molecular da água no estado líquido (LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

A densidade da água varia de $0,9168 \text{ g/cm}^3$ (0°C , forma sólida) à $0,9584 \text{ g/cm}^3$ (100°C , forma gasosa) com maior densidade, 1 g/cm^3 , entre 4°C e 5°C . No intervalo de temperatura 4°C a 0°C , a densidade diminui gradualmente e as ligações de hidrogênio formam uma rede, geralmente caracterizada por uma estrutura hexagonal (Figuras 3 e 4) (LibreTexts Chemistry, 2024).

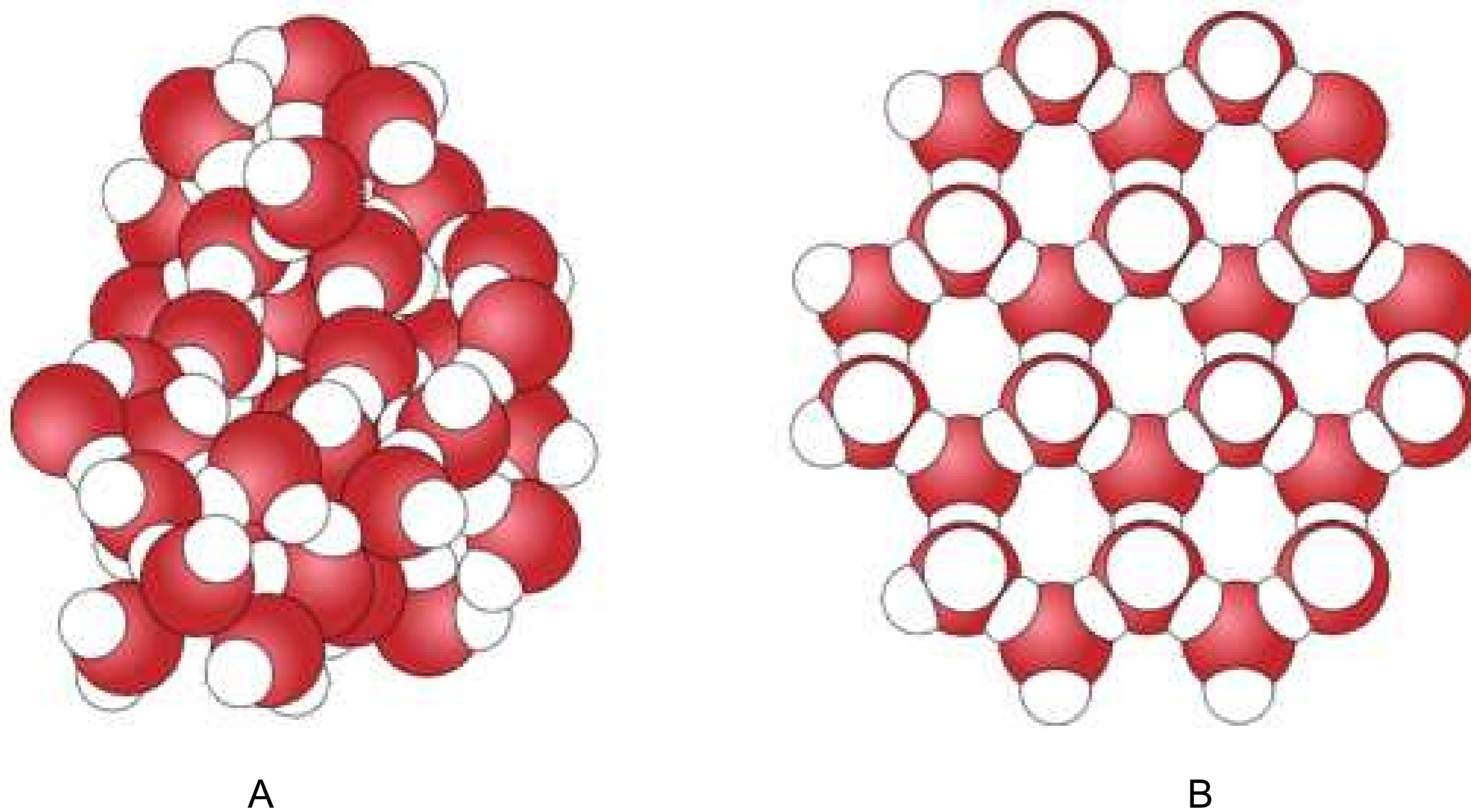


Figura 3 – Estrutura molecular da água nas formas líquida e sólida: A - 0°C (forma líquida, densidade = 0,9998 g/cm³; B - 0°C (forma sólida, densidade = 0,9150 g/cm³)
(LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

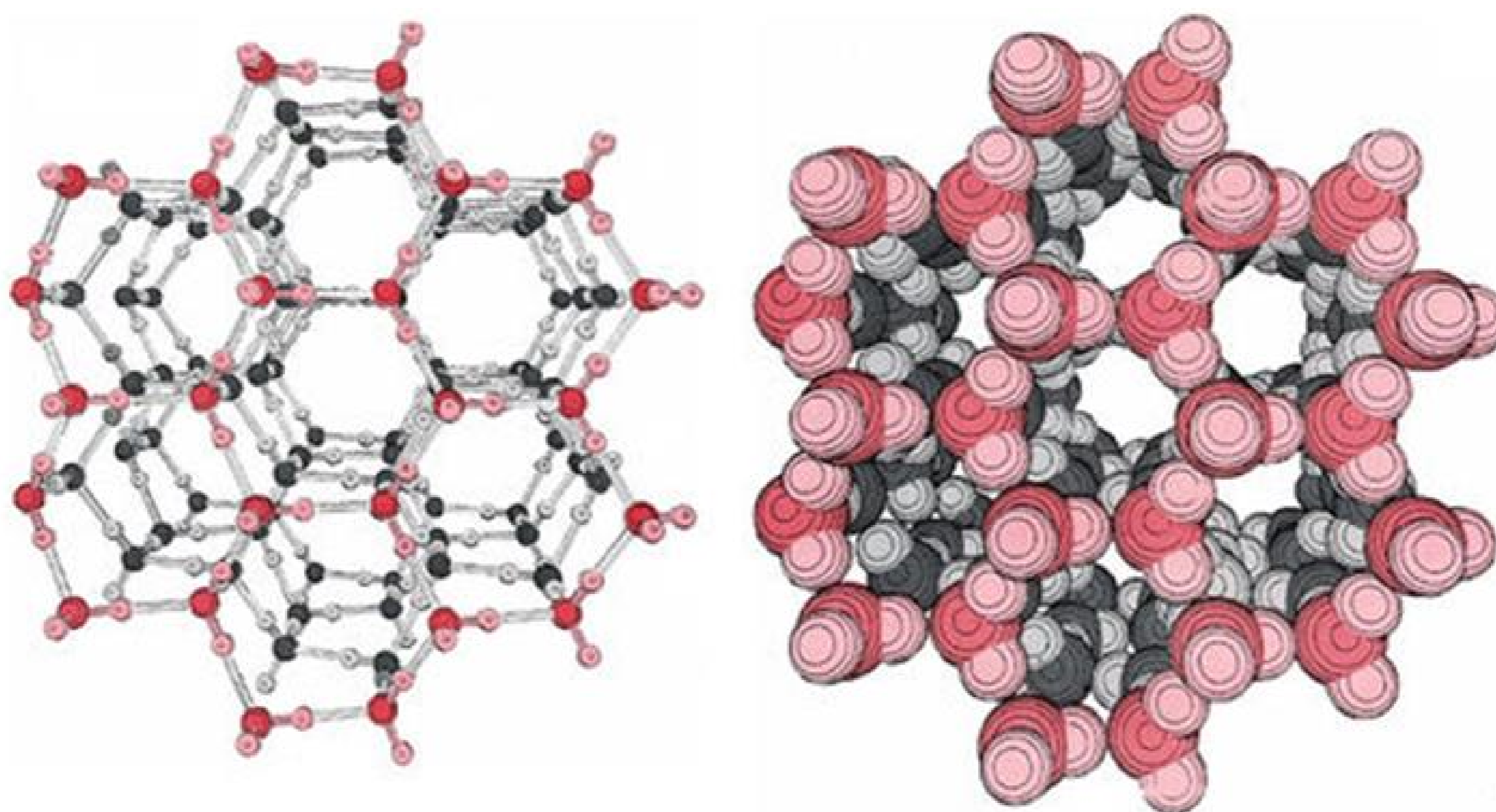


Figura 4 - Imagens de computacional da estrutura do gelo. As moléculas de água foram arranjadas, de modo que cada átomo de oxigênio é cercado por quatro átomos de hidrogênio em geometria tetraédrica. (LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

2. EXPLORANDO A GEOMETRIA COM A MOLÉCULA DA ÁGUA

Estudo desenvolvido com estudantes do curso de bacharelado em educação pré-primária em uma universidade espanhola, como foco no ensino das ciências que teve por propósito, entre outros: a) descobrir forma atrativa e viável de ensinar / aprender ; b) assimilar conceitos científicos básicos; c) desenvolver competências básicas relacionadas a atividade científica, incluindo práticas de investigação e modelização; d) estar consciente da capacidade e interesse dos alunos em trabalhar com conceitos que exigem certas abstrações analisou modelos científicos dos professores pré-primários envolvendo a molécula de água e suas ligações intermoleculares, bem como análise microscópica da água em diferentes estados da matéria, indiretamente exploraram as formas geométricas ilustradas nas Figuras 1 - 4 (Marta Cruz-Guzmán e Criado, 2020).

Se é possível explorar a geometria no estudo da ciência, por que não conhecer a geometria explorando a molécula da água?

H 20

A palavra geometria, certamente leva ao leitor ao mundo matemático, considerando que *Geometria*, em grego clássico: *γεωμετρία*; *geo-* "terra", *-metria* "medida", é um ramo da matemática que lida com a dedução das propriedades, medição e relações de pontos, linhas, ângulos e Figuras no espaço (Flórida: Wikimedia Foundation, [s.d.]; Silva, De e Amarakoon, 2020). Há uma relação entre a matemática, medicina e alquimia, registrada ao longo da humanidade, promovendo assim, entre Idade Média e inícios da Idade Moderna, a divulgação da matemática com natureza sagrada, por estar presente na constituição de tudo, ser necessária aos processos de purificação de metais, do corpo e da alma humanos (Brito e Dalcin, 2023).

A vida está entrelaçada com formas geométricas, tais como os ângulos de ligações atômicas nas moléculas, a forma esférica de a célula que se desenvolve com uma progressão geométrica de um para dois, para quatro, para oito células e ainda, as espirais helicoidais (Silva, De e Amarakoon, 2020).

Platão, filósofo grego e de grande importância para a ciência da matemática, tem suas principais contribuições

H 20

associadas a incansável busca pelo estudo e reconhecimento da matemática, justificando o lema encontrado na entrada de seu centro de estudos: *Que aqui não adentrem aqueles não-versados em geometria* (Mello e Rheinheimer, 2016). Platão caracterizava a geometria como a realidade imutável do mundo em mudança, sendo a proporção geométrica o melhor elo entre a terra e o céu (Silva, De e Amarakoon, 2020). Os poliedros cujas faces são polígonos regulares congruentes, com seus ângulos poliédricos todos congruentes e, ainda são convexos, ou seja, o ângulo de dois lados formados por duas faces consecutivas é menor que 180° , são definidos como poliedros regulares e conhecidos como poliedros de Platão (Mello e Rheinheimer, 2016).

Explorar o ensino da geometria, de acordo com os diferentes níveis de pensamento dos alunos em uma classe é uma forma de promover um ensino que atenda a todos, e, ainda, facilitar a percepção do desenvolvimento em equipe (Utomo *et al.*, 2023). O modelo do pensamento geométrico desenvolvido por Van Hiele estabelece que o pensamento geométrico individual é desenvolvido através de 5 níveis:

H 20

visualização, análise, dedução informal (abstração), dedução e rigor (Sumarto *et al.*, 2022; Utomo *et al.*, 2023). Mesmo tendo sido desenvolvida na década de 50, ainda é bem explorado no ensino da matemática, como: na análise da relação entre os níveis de pensamento geométrico de alunos e suas habilidades de revisão e justificativa, verificando relação linear entre essas habilidades e os níveis de pensamento de Van Hiele (Kabinaa Enoch, 2024) e o impacto do método Van Hiele na aprendizagem de transformações geométricas utilizando rastreamento ocular, destacando como diferentes níveis de atenção espacial afetaram o processo decisório e a compreensão geométrica dos alunos (Ghorbani *et al.*, 2023), indicando se manter robusto para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A partir da estrutura da molécula da água, os sólidos de Platão e, ainda a última proposição ou o teorema dos elementos de Euclides estão sendo propostas práticas de ensino aplicando o método de Van Hiele, para serem conduzidas em salas de aula (Mello e Rheinheimer, 2016; Trindade, da, Araújo Júnior e Nascimento, 2020).

CAPÍTULO 2 - PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO POLIEDROS E MOLÉCULA DA ÁGUA

Este capítulo tem como finalidade apresentar propostas de práticas de ensino envolvendo a estrutura da molécula da água. Como já mencionado anteriormente, adaptações são incentivadas para ajustar aos conteúdos dos diferentes anos dos ensinos fundamental e médio.

1. Explorando a molécula de água no ensino da geometria aplicando o o método de Van Hiele ((Sumarto *et al.*, 2022; Utomo *et al.*, 2023):

Etapa 1 – nível visualização, método de Van Hiele – reconhecimento de imagens a partir de comparação com formas familiares, onde as decisões são tomadas apenas pela percepção:

- a) É apresentada a molécula de água (Figura 1), que também pode ser uma construção com material concreto. Aqui está sendo proposto o uso de uma molécula de água em 3D (Figura 2), mantendo o ângulo entre os átomos de oxigênio e hidrogênio

($104,5^\circ$), protótipo disponível no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]). Pede-se ao aluno que manipule o objeto.

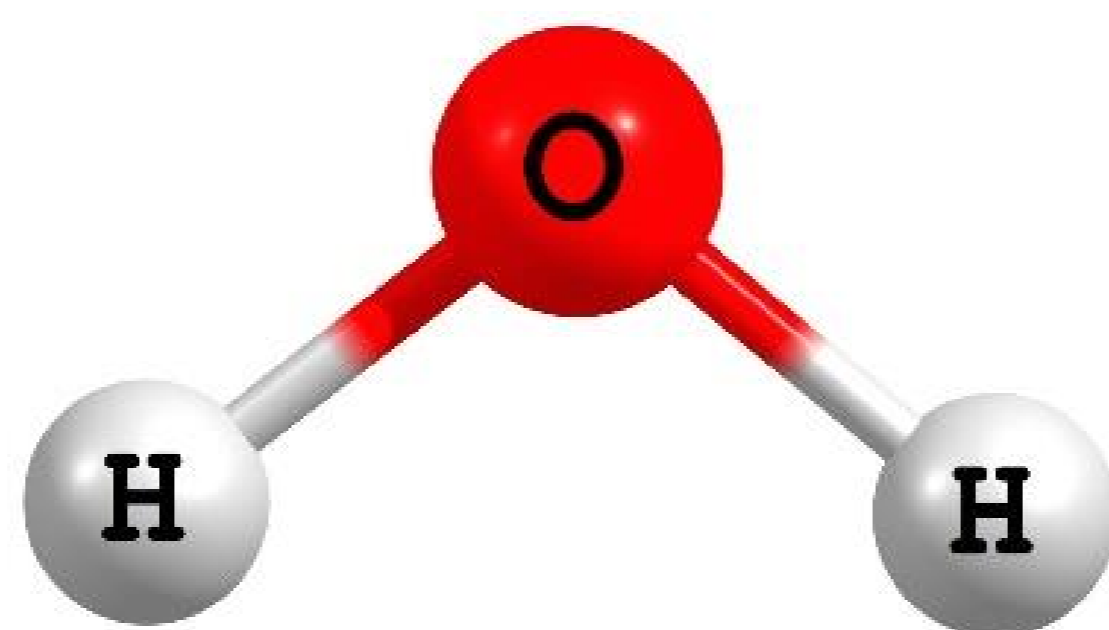


Figura 1 – Molécula da água – modelo bola e vara



Figura 2 – Modelo da molécula de água (bola e vara) em 3D

Etapa 2 – nível análise, método de Van Hiele – observa a imagem e suas propriedades, reconhecendo nome e as propriedades da Figura geométrica, descrevendo-a, mas não distinguindo quais as propriedades são suficientes para a descrição do objeto:

- a) O estudante deve desenhar a Figura geométrica que mais se assemelha ao objeto visualizado ou que lhe foi entregue.

Obs. - O professor deve observar se o desenho que lhe será apresentado apresenta apenas segmento de retas ou se estarão sendo identificadas medidas, quando no uso de material concreto (Figura 3).

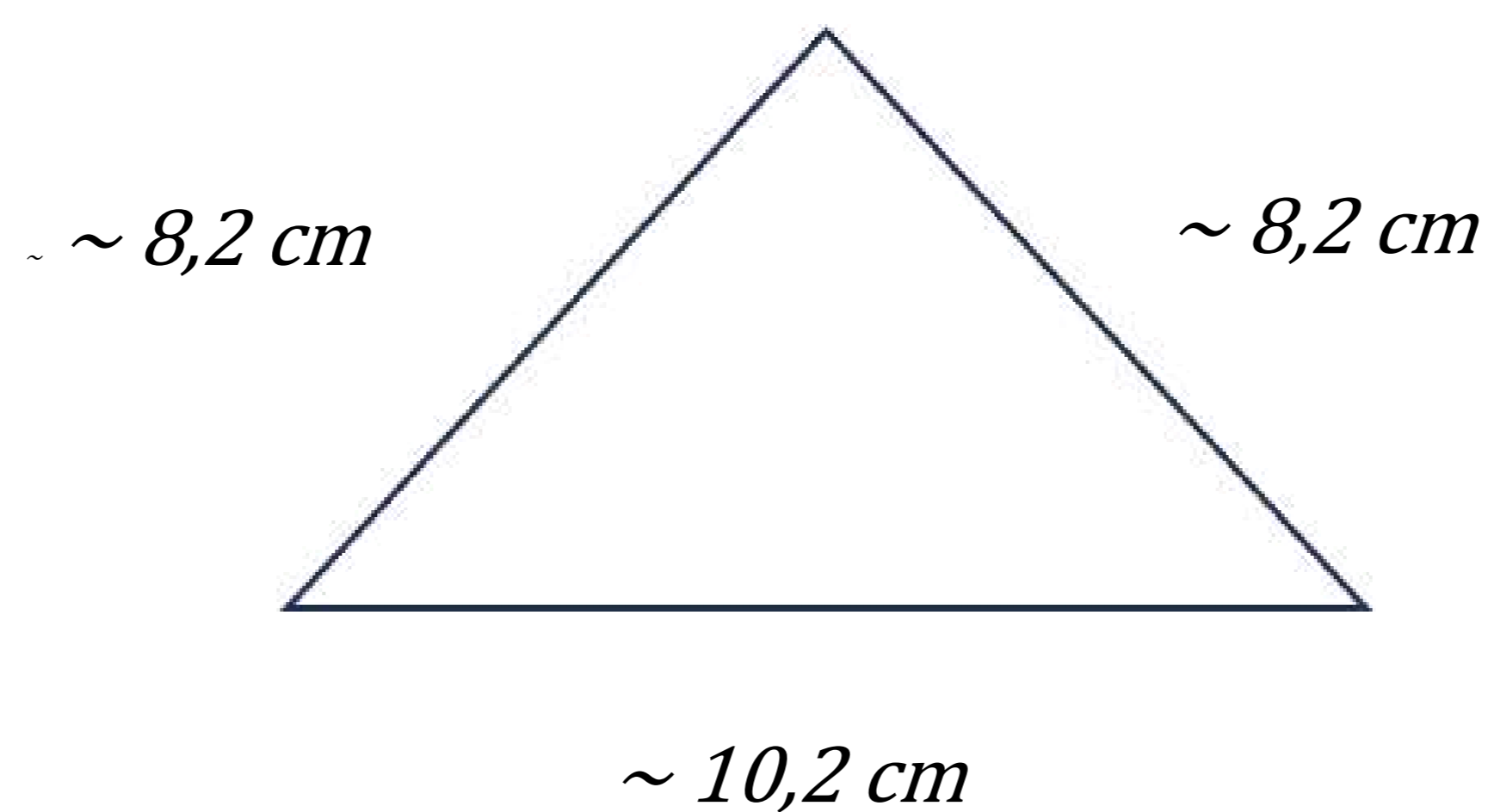


Figura 3 – Medidas das distâncias entre oxigênio e hidrogênio da estrutura da molécula da água em 3D

b) Com um elástico envolver a estrutura molecular da água em 3D (Figura 4).

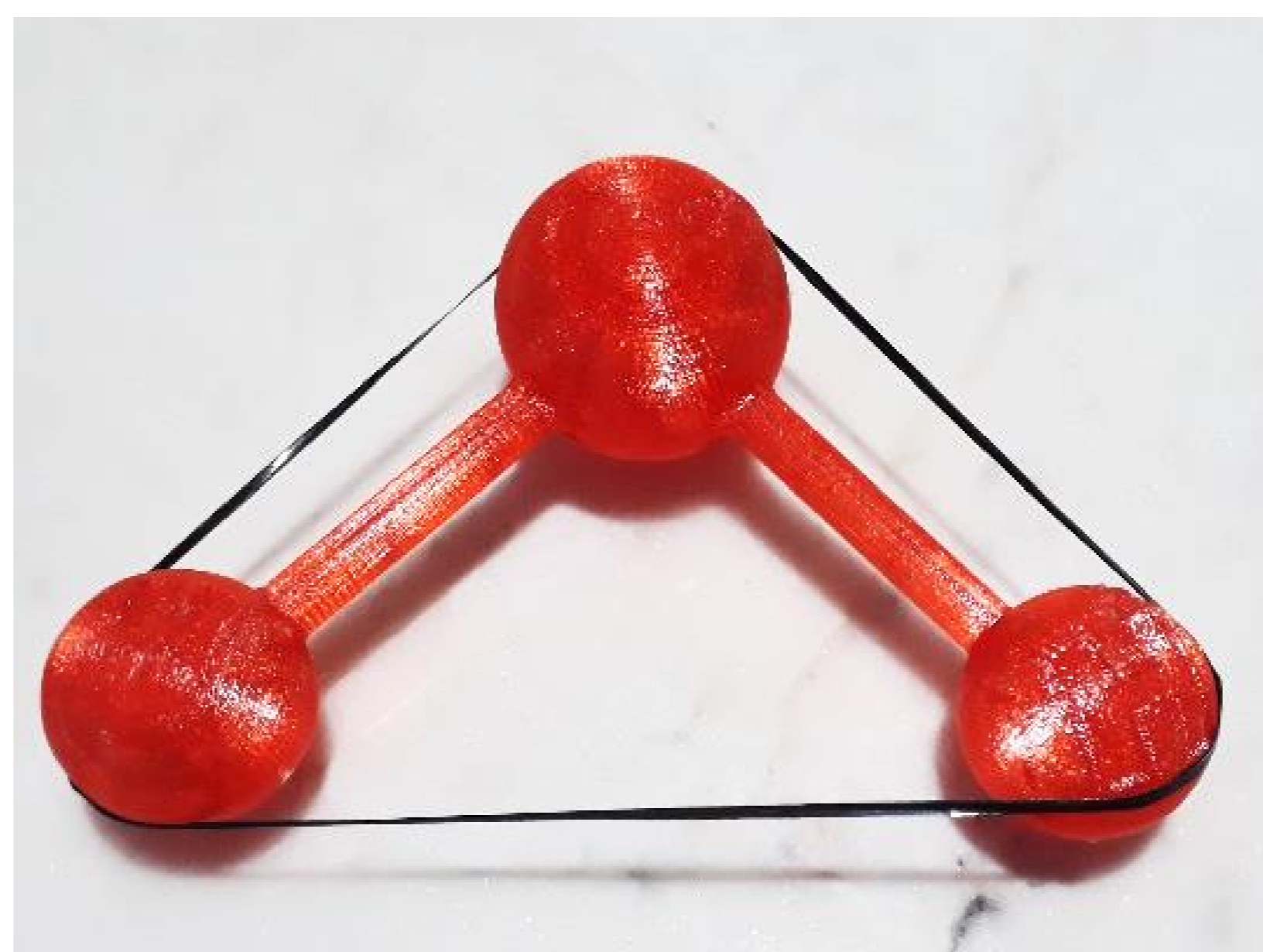


Figura 4 – Estrutura da molécula da água em 3D, envolvida com elástico

c) Medir as distâncias entre as pontas dos átomos de hidrogênio e oxigênio (Figura 3) e traçar a Figura geométrica com as mesmas medidas.

Etapa 3 – nível abstração, método de Van Hiele – é possível compreender a relação entre as propriedades geométricas da Figura em análise e a Figura geométrica identificada:

É apresentado ao estudante 3 triângulos (retângulo e isósceles; equilátero; isósceles com ângulo $104,5^\circ$), Figura 5, protótipos disponíveis no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]).

a) Identificar o tipo de triângulo similar à estrutura da molécula da água.

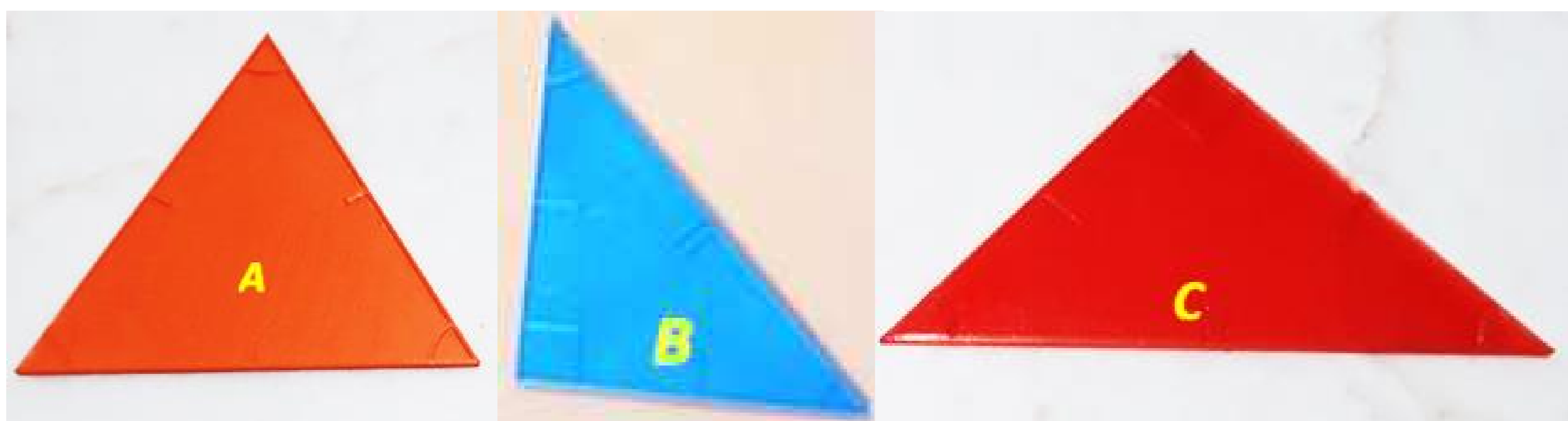


Figura 5 – Triângulos em 3D: equilátero (a), retângulo e isósceles (B) e isósceles com ângulo $104,5^\circ$ (C)

Consolidação dos conceitos matemáticos explorados na atividade:

- a) A partir da informação quanto ao ângulo e distância das ligações da molécula da água (Figura 6) classificar o tipo de triângulo que a estrutura da água “forma” considerando os conceitos matemáticos.

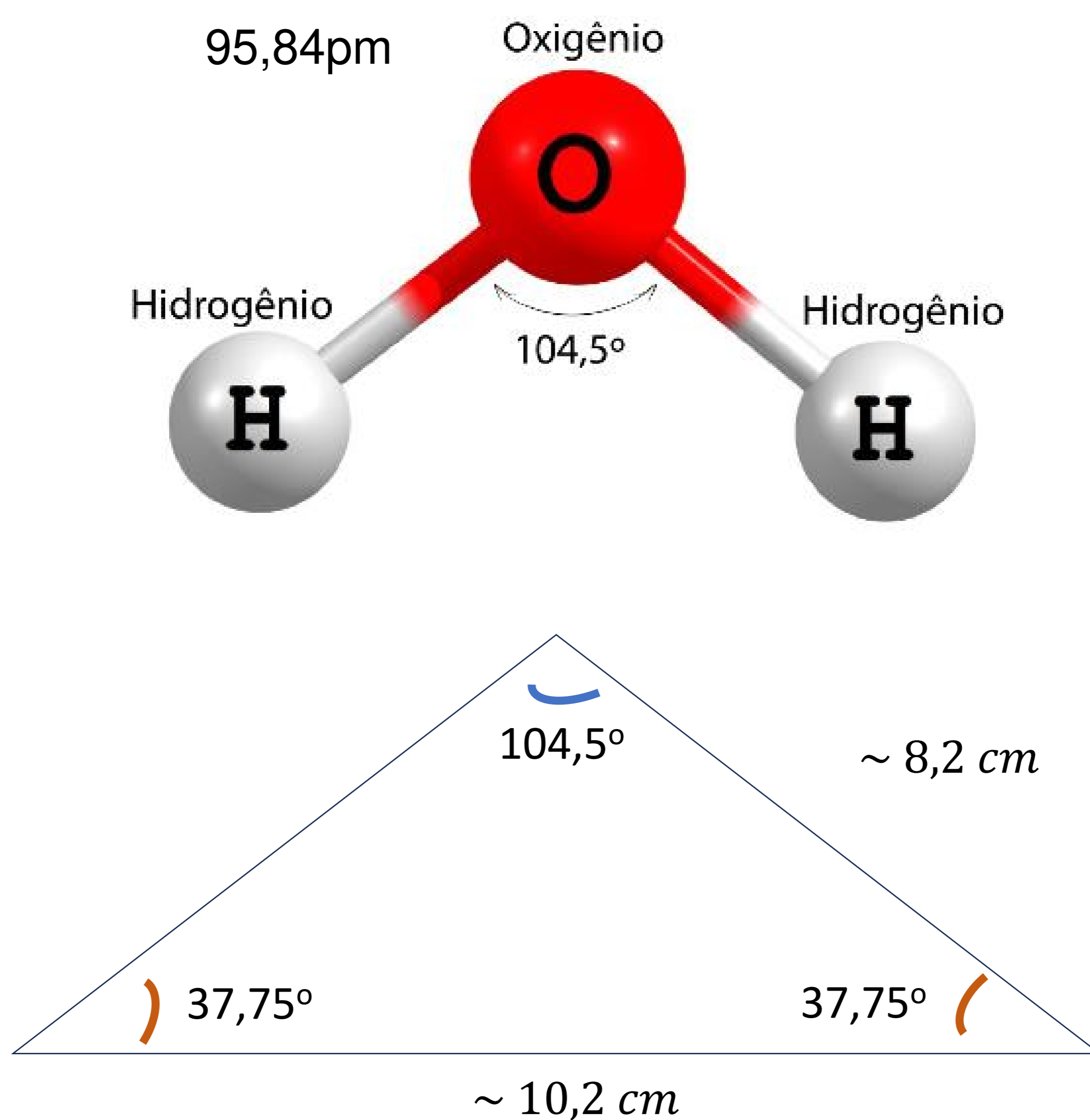


Figura 6 – Molécula da água e representação geométrica da mesma (“La Qualité des Eaux de consommation - L’influx”, [s.d.])

2. Identificando a Figura geométrica associado ao estado físico da água líquida aplicando o método de Van Hiele (Sumarto *et al.*, 2022; Utomo *et al.*, 2023):

Etapa 1 – nível visualização, método de Van Hiele

a) Construir 5 moléculas de água a partir de material concreto (Figura 7). Os materiais sugeridos para esta atividade são: bolinhas ímãs laranja representando o oxigênio (5 unidades), bolinhas ímãs prata representando o hidrogênio (10 unidades), barrinhas ímãs coloridas para estruturar a molécula de água (10 unidades)



Figura 7 – Molécula de água construída com bolinhas barrinhas magnéticas

b) A partir da informação que na forma líquida, uma molécula de água se liga à 4 outras moléculas de água, sempre aproximando oxigênio de hidrogênio, estruturar a água na forma líquida (Figura 8), sendo disponibilizadas barrinhas ímãs pratas.

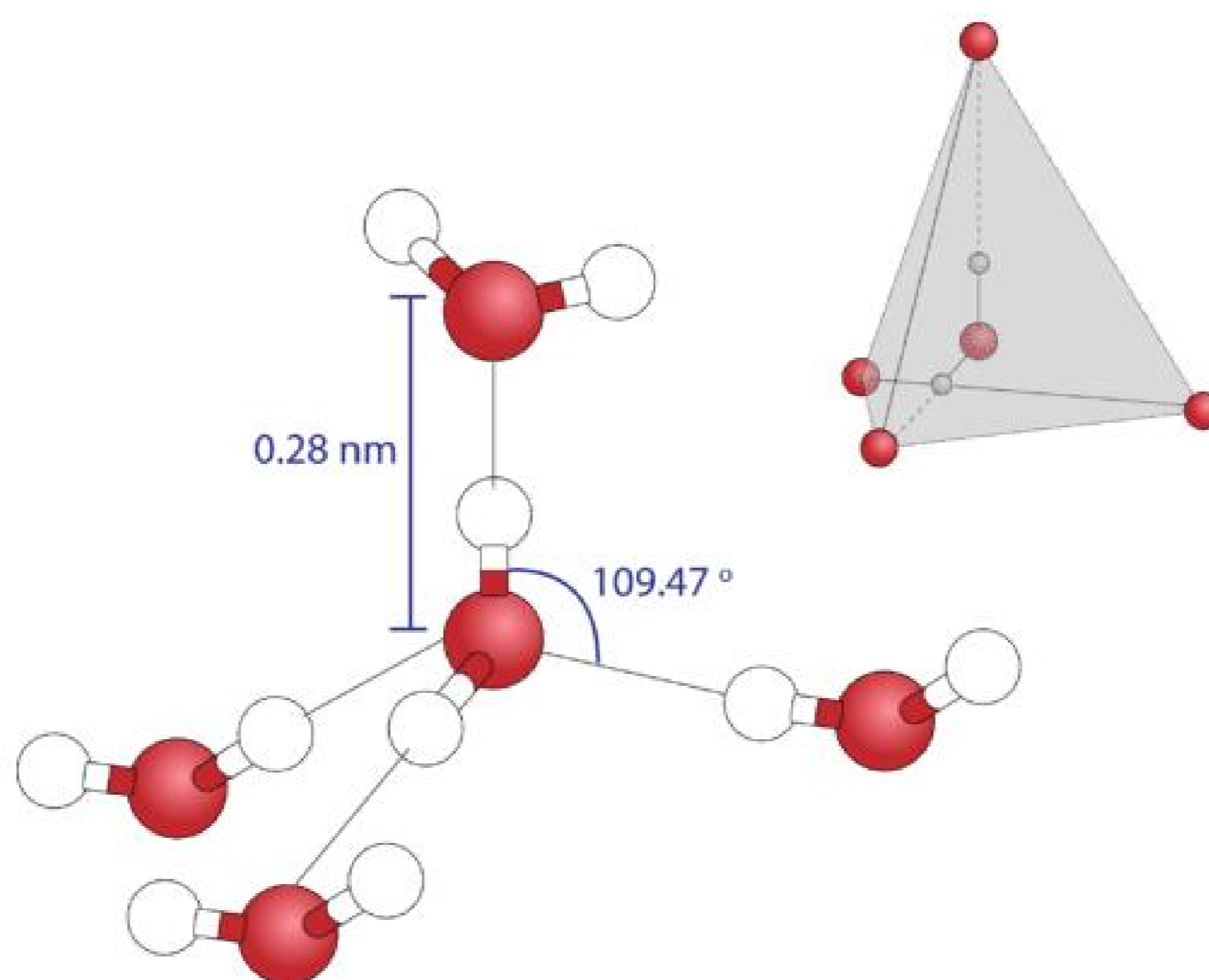


Figura 8 – Estrutura molecular da água no estado líquido (LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

Com o uso de 8 barrinhas ímãs prata, a molécula da água é representada como indicado na Figura 9.



Figura 9 – Água na forma líquida estruturada com bolinhas e barrinhas ímãs

Etapa 2 – nível análise, método de Van Hiele:

a) Com 4 triângulos equiláteros construir Figura semelhante à molécula da água na forma líquida (Figura 8). Utilize 4 triângulos isósceles que tenham ângulos

similares à molécula da água, para construir figura semelhante à molécula da água na forma líquida (Figura 10), protótipos disponíveis no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]).

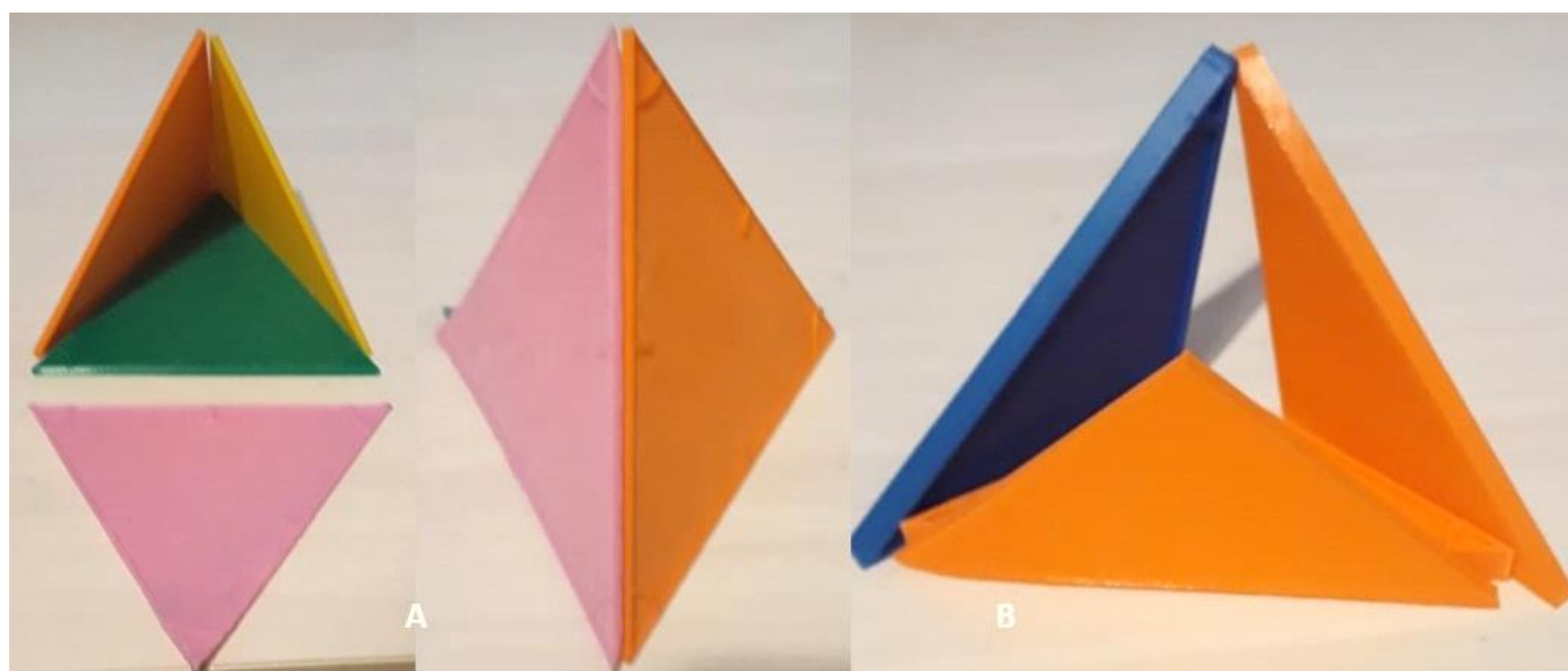


Figura 10. Representação da estrutura da molécula de água na forma líquida com triângulo equilátero (A) e isósceles com ângulo similar molécula de água (B)

b) Observar as Figuras construídas. Considerando que um poliedro é um sólido geométrico limitado por um número finito de polígonos, identifique se um poliedro foi formado.

Consolidação dos conceitos matemáticos explorados na atividade:

Responda as seguintes questões, utilizando conceitos matemáticos:

- i. O movimento da molécula da água é no plano ou no espaço?
- ii. Sabendo que um poliedro é um sólido geométrico limitado por um número finito de polígonos, qual poliedro formado?
- iii. Sabendo que os polígonos regulares e congruentes formam a face de um poliedro regular e que a intersecção entre duas faces se denomina aresta, identifique a quantidade de faces, arestas e vértices do poliedro construído.
- iv. Qual a diferença entre os poliedros regular e irregular?]

3. Explorando a interação entre moléculas da água usando as faces poligonais do tetraedro, prismas pentagonal e hexagonal aplicando o método de Van Hiele (Sumarto *et al.*, 2022; Utomo *et al.*, 2023):

Etapa 1 – nível visualização, método de Van Hiele

a) É apresentado ao aluno um cubo (Figura 11). A partir de 4 moléculas de água (Figuras 2 e 7) indicar a forma de interação entre essas moléculas para se obter a mesma Figura geométrica de uma das faces do cubo. Repetir o procedimento a partir das faces de um heptaedro do tipo prisma pentagonal (5 moléculas de água) e de um octaedro tipo prisma hexagonal (6 moléculas de água) (Figura 11), protótipos disponíveis no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]])

Os materiais sugeridos para esta atividade são: bolinhas imãs laranja, representando o oxigênio (6 unidades), bolinhas imãs prata representando o hidrogênio (12 unidades), barrinhas imãs coloridas para

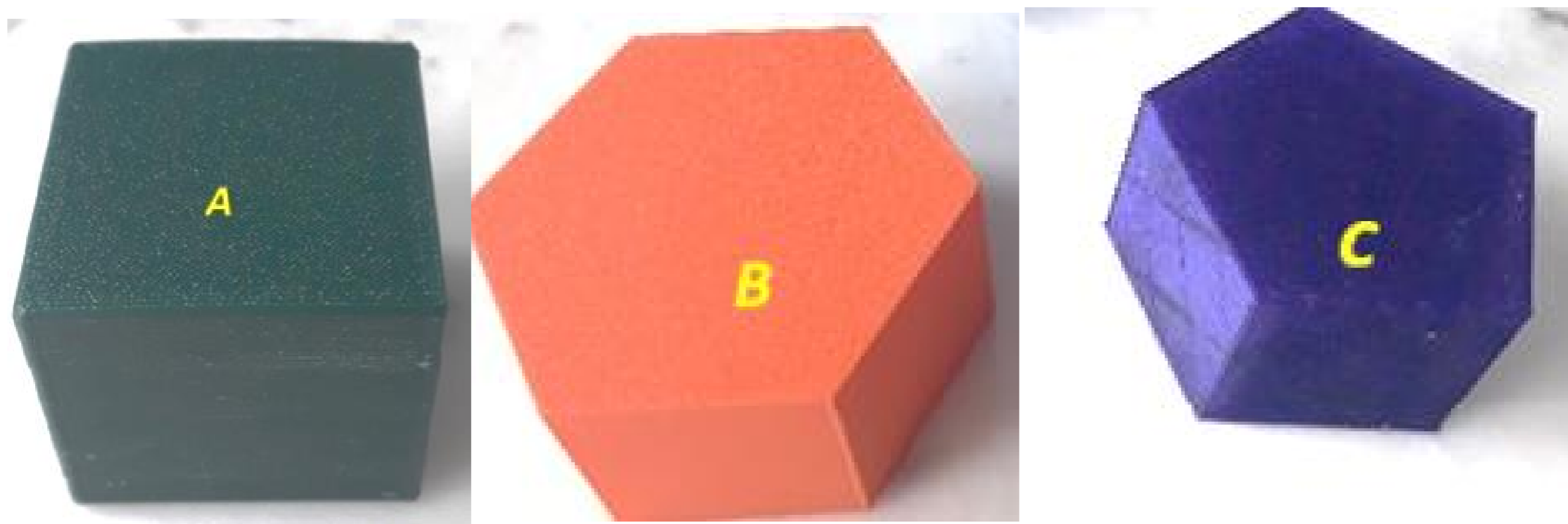


Figura 11 – Cubo (A), prisma hexagonal (B) e prisma pentagonal (C)

estruturar a molécula de água (10 unidades) (Figura 12), e molécula da água em 3D, aplicável para estudantes cegos e com baixa visão (Figura 13). Observar a rigidez ou maleabilidade das moléculas da água, visando perceber a estrutura de maior estabilidade química desta substância.

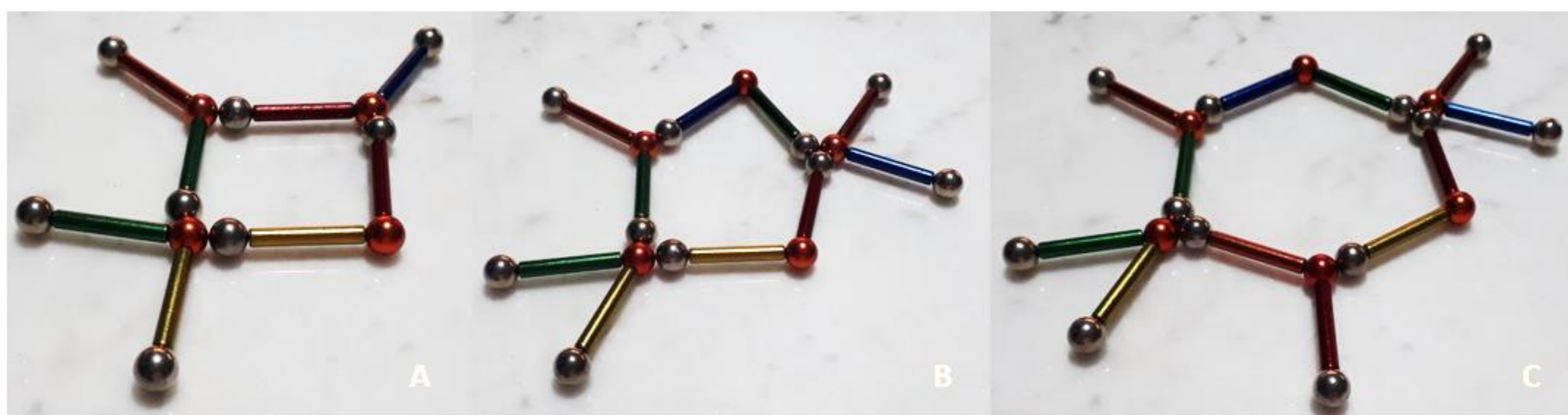


Figura 12 – Moléculas de água com bolinhas e barrinhas imãs, estruturadas na forma de um quadrado (A), pentágono (B) e hexágono (C)

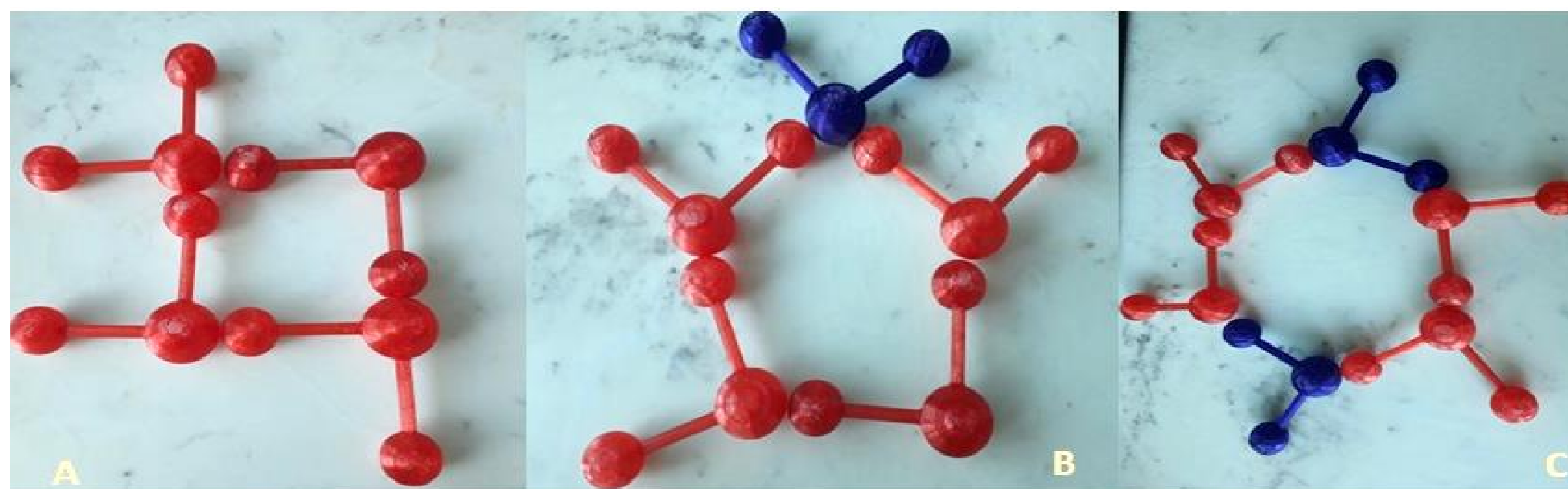


Figura 13 - Moléculas de água em 3D, estruturadas na forma de um quadrado (A), pentágono (B) e hexágono (C)

Etapa 2 – nível análise, método de Van Hiele

- a) Analise as formas geométricas e relacione com a interação entre as moléculas da água, com base no que aprendeu nas práticas 1 e 2.

Etapa 3 – nível abstração, método de Van Hiele

- a) Indique com qual(is) tipo(s) e a quantidade de triângulo que devem ser usados para a construção dos polígonos citados na etapa 1.

Os materiais sugeridos para esta atividade são: triângulo isósceles retângulo em 3D, triângulo equilátero em 3D e triângulo isósceles, com um ângulo com $104,5^\circ$ em 3D (Figura 14).

Consolidação dos conceitos matemáticos explorados na atividade:

Responda as seguintes questões, utilizando conceitos matemáticos:

- i. Sabendo que os polígonos formam a face de um poliedro e que a intersecção entre duas faces se denomina aresta, identifique quantas faces, arestas e vértices de cada poliedro usado na etapa 1.

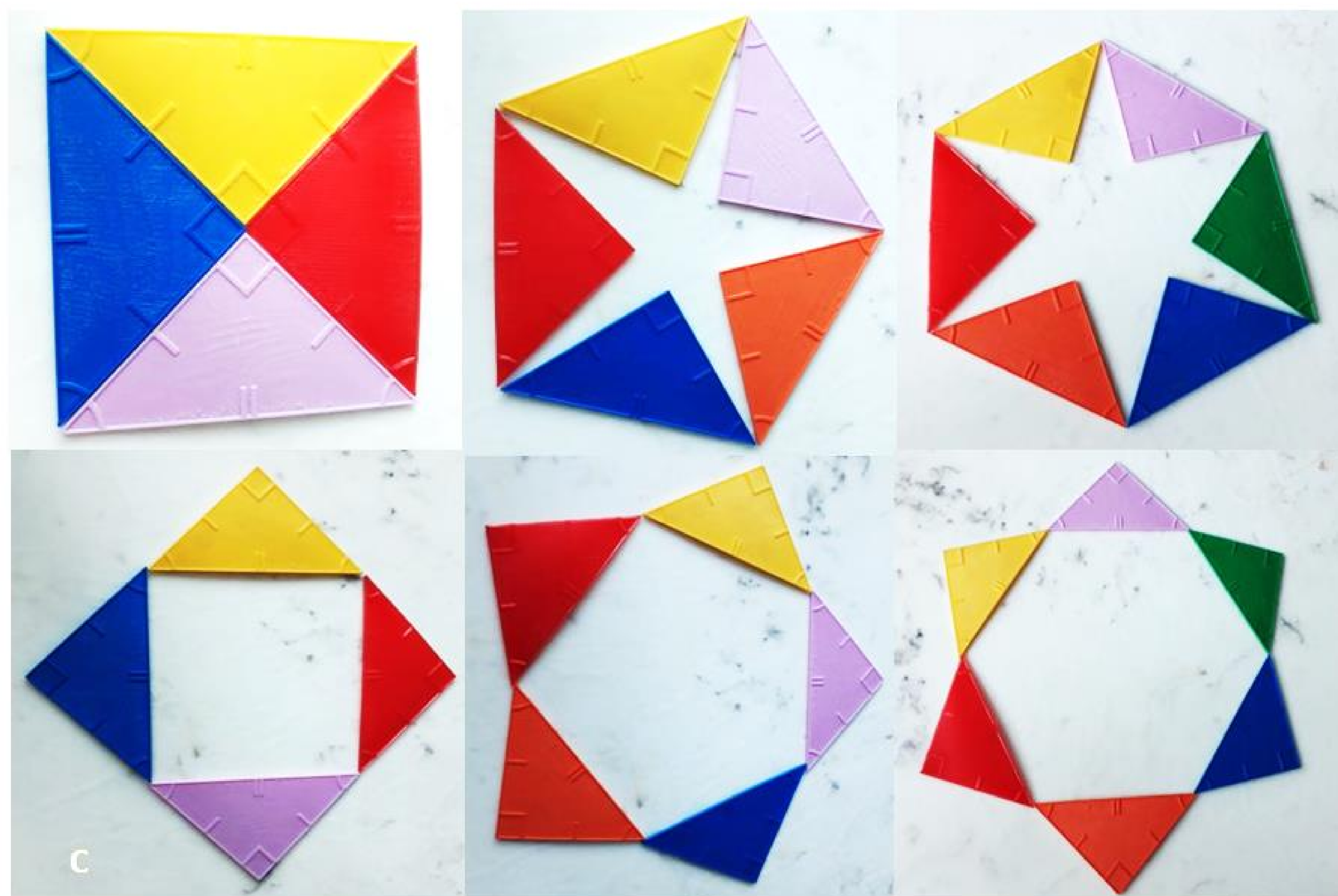
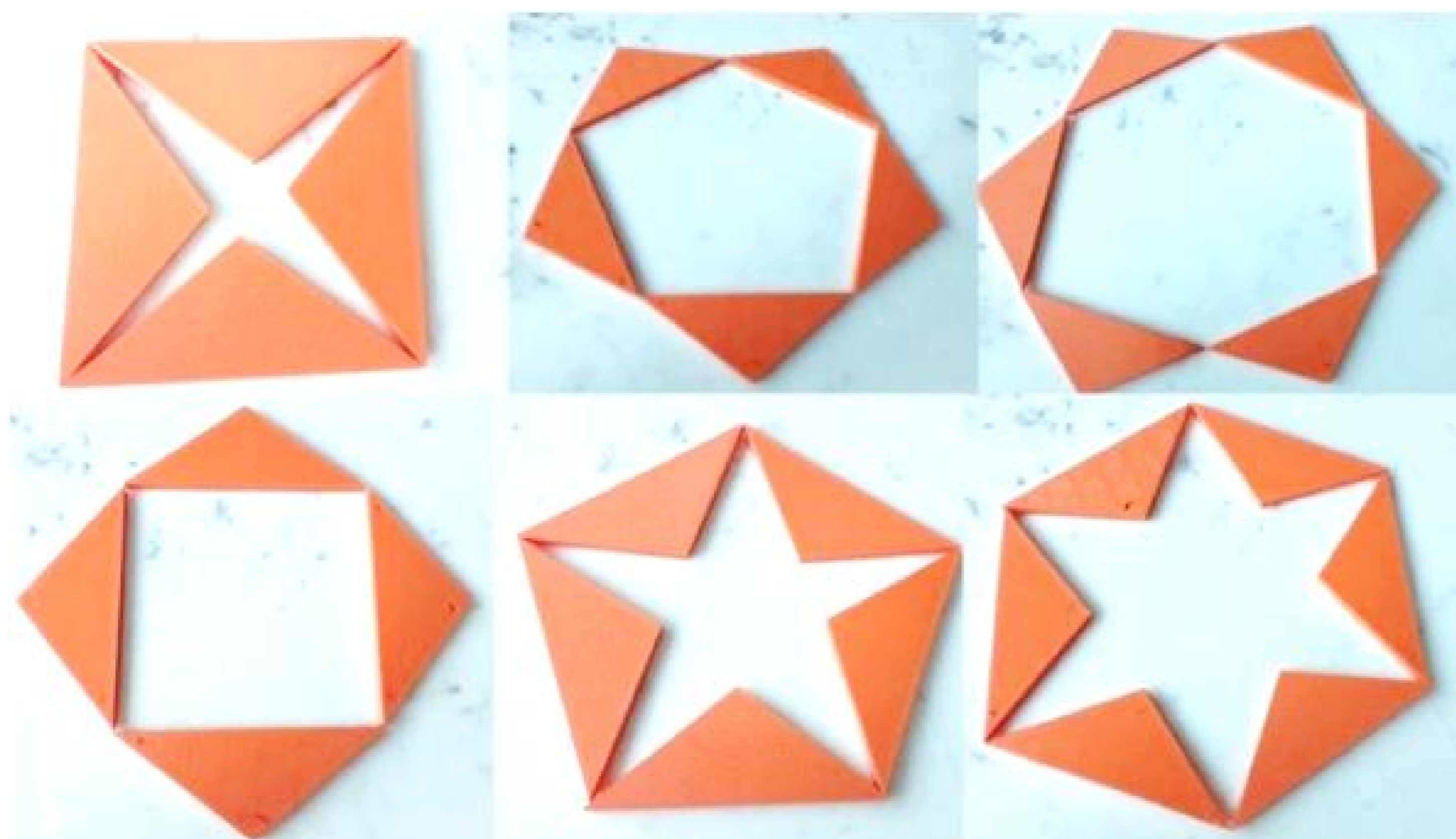


Figura 14 – Polígonos estruturados com triângulos em 3D: isósceles com um ângulo com $104,5^\circ$ (A), triângulo equilátero (B) e triângulo retângulo e isósceles (C)

ii. Sabendo que um poliedro é considerado convexo quando os ângulos de dois lados formados por duas faces consecutivas são menores que 180° , identifique se os poliedros em estudo são convexos.

iii. Existe alguma relação entre as respostas das mesmas perguntas aplicadas ao tetraedro (prática 1)?

4. Identificando a figura geométrica associado ao estado físico da água sólida aplicando o método de Van Hiele (SUMARTO et al., 2022; UTOMO et al., 2023).

Etapa 1 – nível visualização, método de Van Hiele

É apresentado ao aluno o vídeo *water turning into ice* (3D Molecular Visualisation - Water Turning into Ice - YouTube, n.d.) que ilustra a transformação da água da forma líquida para forma sólida.

Etapa 2 – nível análise, método de Van Hiele

- a) Desenhar figura semelhante a estrutura do gelo, observada no vídeo.

Etapa 3 – nível abstração, método de Van Hiele

- a) Observar a figura que construiu com a imagem computacional da estrutura do gelo (Figura 15). Identifique figura(s) geométrica(s).

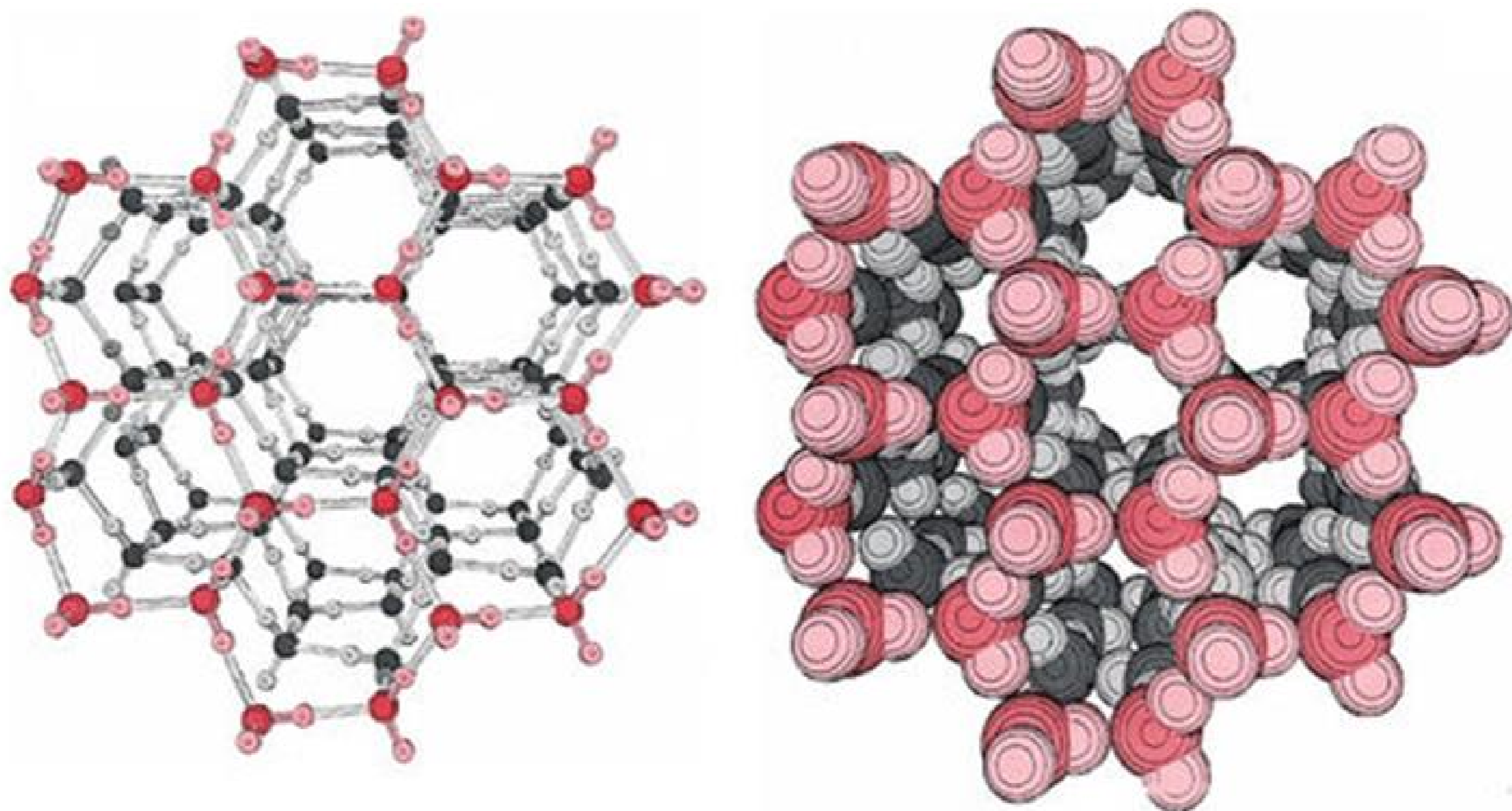


Figura 15 - Imagens computacional da estrutura do gelo. As moléculas de água foram arranjadas, de modo que cada átomo de oxigênio é cercado por quatro átomos de hidrogênio em geometria tetraédrica. (LIBRETEXTS CHEMISTRY, 2024)

Consolidação dos conceitos matemáticos explorados na atividade:

Responda as seguintes questões, utilizando conceitos matemáticos:

- i. Construir uma tabela (tabela 1) com a quantidade de faces, arestas e vértices dos poliedros indicando se estes são côncavos ou convexos: tetraedro, hexaedro, prisma pentagonal regular e prisma hexagonal regular. Identificar se há algum padrão entre estas Figuras geométricas.
- ii.. Os poliedros do item anterior se fossem irregulares, seriam convexos?

iii. Observe os octaedros regular ([Octaedro Regular – GeoGebra](#)) e não regular ([Un octaedro no regular – GeoGebra](#)). Complemente a tabela do item i, com estes sólidos.

iv. Observe o dodecaedro regular ([Dodecaedro Regular – GeoGebra](#)) e o dodecaedro estrelado ([Dodecaedro estrelado – GeoGebra](#)). Complemente a tabela do item i, com estes sólidos.

v. Observe o icosaedro regular ([Icosaedro Regular – GeoGebra](#)) e o grande icosaedro ([Gran icosaedro – GeoGebra](#)), Complemente a tabela do item i, com estes sólidos.

Tabela 1 – Modelo de tabela a ser construída durante a atividade proposta

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	Côncavo/ convexo
Tetraedro regular				
Hexaedro regular				
Prisma pentagonal regular				
Prisma hexagonal regular				

A tabela 2 apresenta os dados que devem estar na tabela construída durante a atividade.

Tabela 2 – Poliedros côncavo/convexos com os quantitativos de faces, arestas e vértices

	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	Côncavo/ convexo
Tetraedro regular	4	6	4	convexo
Hexaedro regular	4	12	8	convexo
Prisma pentagonal regular	7	15	10	convexo
Prisma hexagonal regular	8	18	12	convexo
Octaedro regular	8	12	6	convexo
Octaedro não regular	8	12	6	convexo
Dodecaedro regular	12	30	20	convexo
Dodecaedro estrelado	12	18	8	côncavo
Icosaedro regular	20	30	12	convexo
Icosaedro não regular	20	30	12	côncavo

vi - Sabendo que a relação de Euler é dada por $F + V = A + 2$, observe se a mesma é aplicada em todos os poliedros da tabela 1.

vii. Para qual tipo de poliedro a relação de Euler é válida?

Para esta prática de ensino, também podem ser usadas figuras geométricas impressas em impressora

3D, figuras 16 e 17, protótipos disponíveis no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]).

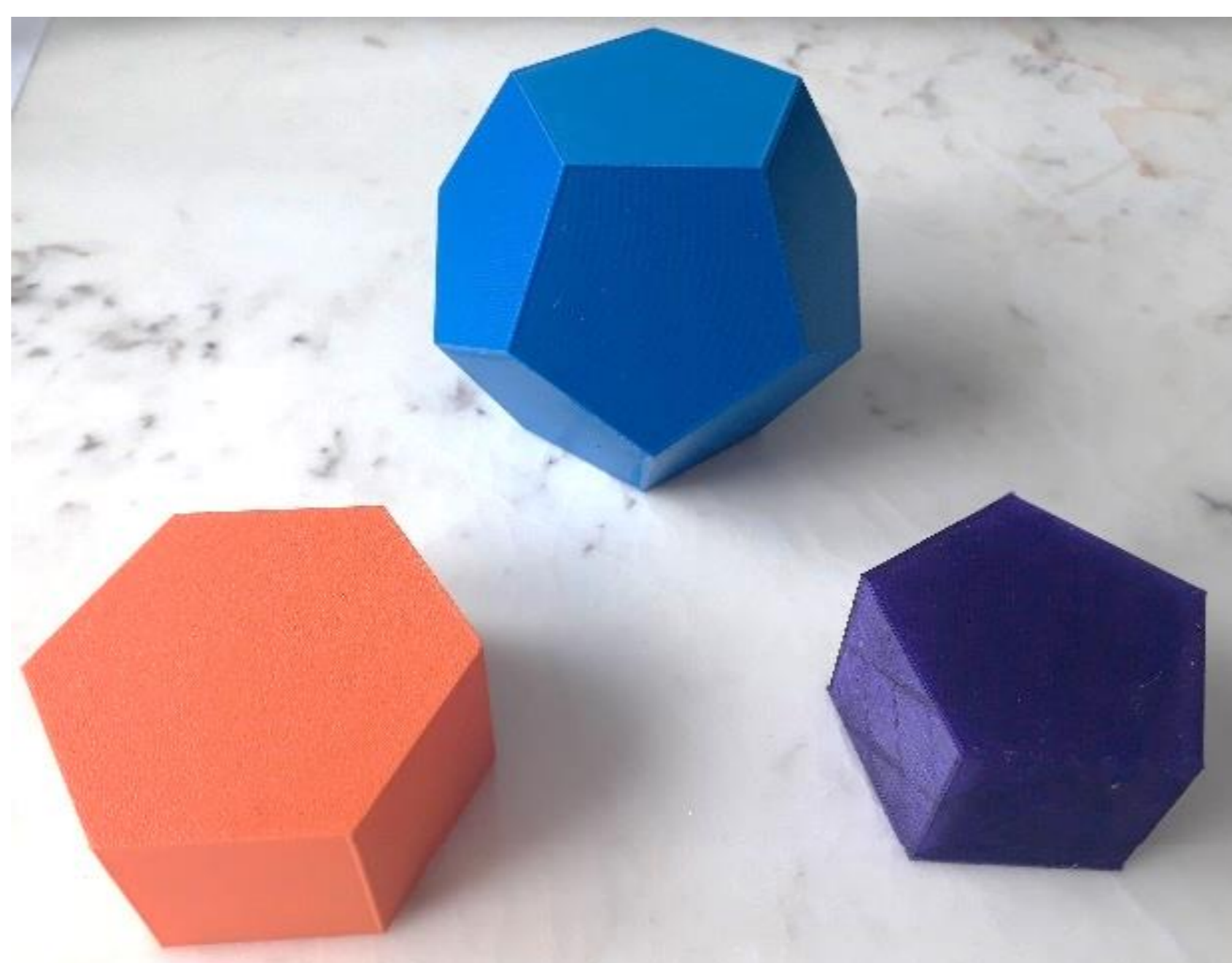


Figura 16 – Prisma de bases pentagonal e hexagonal e dodecaedro

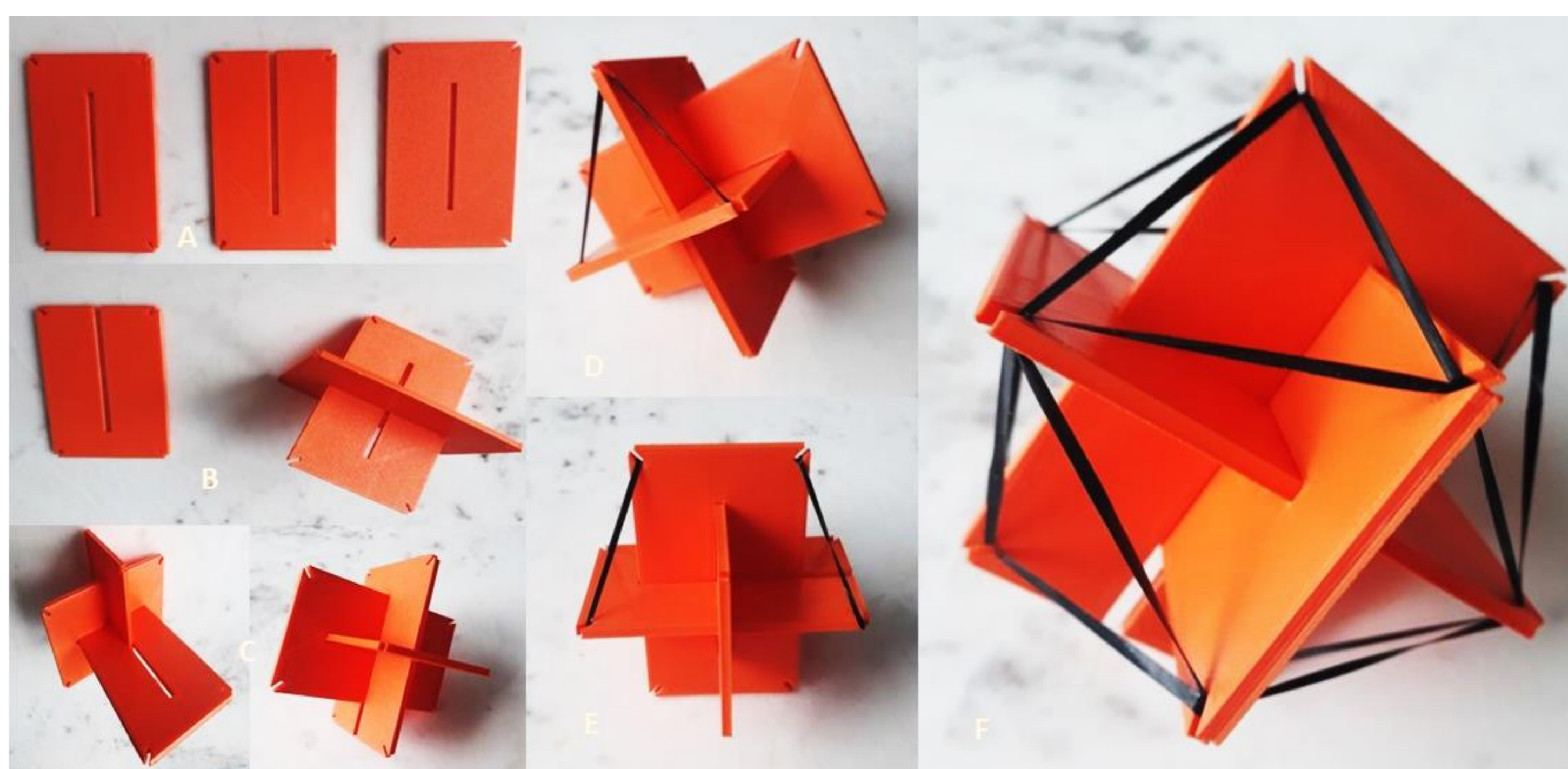


Figura 17 – Construção de icosaedro com retângulos áureos e elásticos (A – Conjunto retângulos áureos; B - Encaixe retângulos fechados; C - Encaixe retângulo aberto; D e E - Construindo faces triangulares com elásticos; F – Icosaedro)

CAPÍTULO 3 – OS SÓLIDOS DE PLATÃO, A MOLÉCULA DA ÁGUA, AS ARTES E O CORPO HUMANO

Pitágoras e Platão associavam o estudo da geometria espacial ao da metafísica e da religião (Trindade, da, Araújo Júnior e Nascimento, 2020). Platão relacionava os poliedros regulares com os cinco elementos da natureza: tetraedro (elemento de origem do fogo), cubo (terra), octaedro (ar), icosaedro (água) e dodecaedro (imagem do Universo no seu todo) e o Pitagórico Timeu de Locri, conhecido como Timeu de Platão, associava misticamente os sólidos: tetraedro, octaedro, icosaedro e cubo, aos quatro elementos: fogo, ar, água e terra (Mello e Rheinheimer, 2016). Ainda hoje os sólidos de Platão são estudados tanto no viés de sua associação com os elementos naturais quanto com outras perspectivas, como a mecânica quântica moderna (Tavakoli e Gisin, 2020).

Uma análise comparativa quanto a formação do universo a partir da descrição feita por Platão com esses 5 poliedros que estabelece a cosmogênese com base em

formas geométricas “em seu estado nascente” é feita com a cosmogênese Chinesa a partir do diagrama de wuxing (teoria dos 5 elementos) e ressalta-se que em ambas as teorias se baseiam no constante movimento de corpos, ciclos em transformações, onde os 5 elementos estão associados à constituição do corpo humano e a tudo que influencia sua relação com o meio ambiente (Monnot, 2024).

Os sólidos de Platão são um caso particular no estudo dos Poliedros atendendo as seguintes condições: ser convexo e regular, todas as faces possuírem a mesma quantidade de arestas e todos os vértices serem extremidades de uma mesma quantidade de arestas. Como já visto no capítulo anterior, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler. Protótipos dos sólidos de Platão, para impressão 3D (Figura 1), estão disponíveis no site MATLABBIO (“Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN”, [s.d.]).

Ao considerar a estrutura da molécula de água, nas formas líquida e sólida, foram apresentadas duas formas geométricas regulares (tetraedro e hexágono). Sabendo que a água corresponde a 70% da

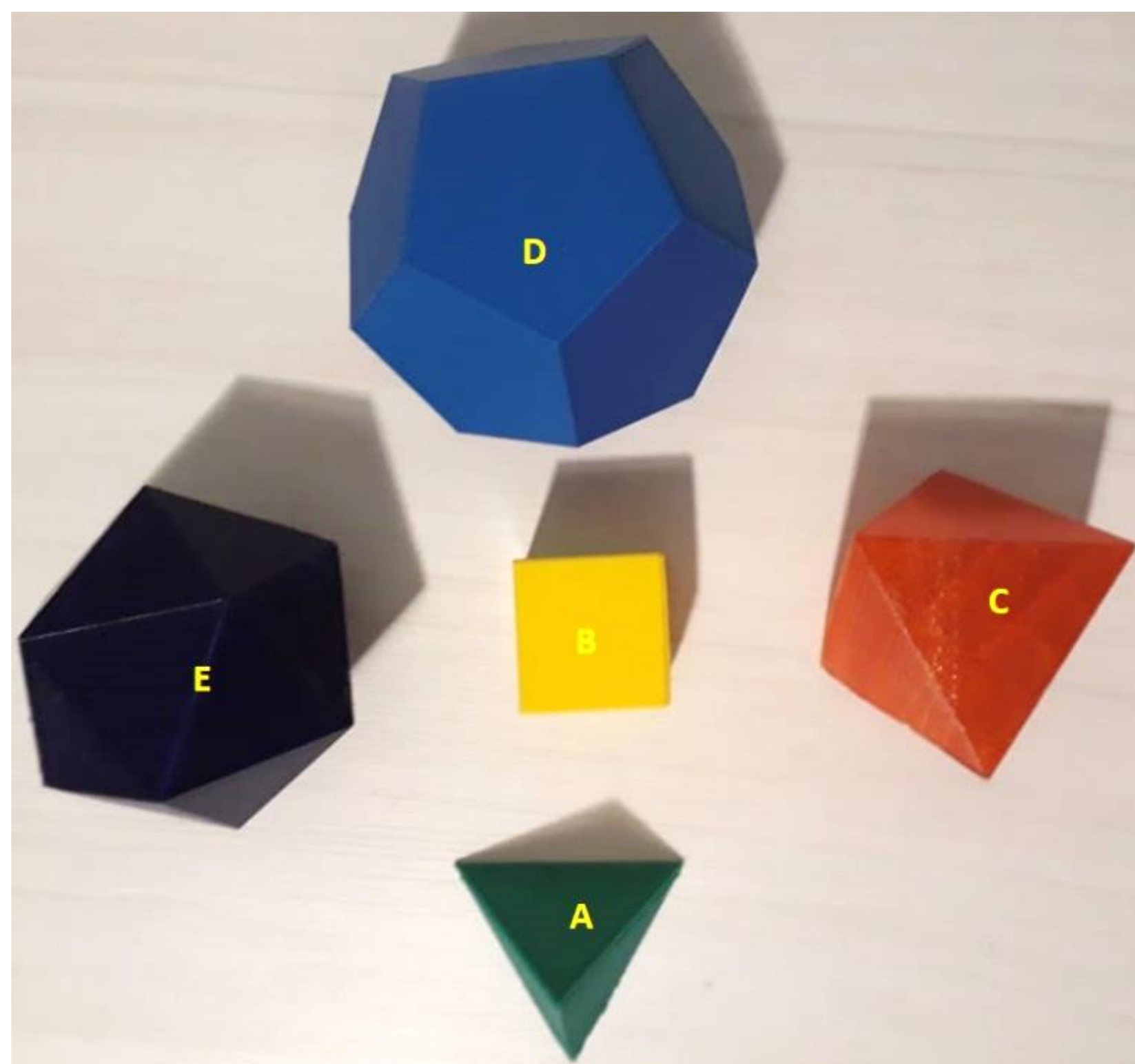


Figura 1 – Sólidos de Platão em 3D (A – tetraedro; B – hexaedro, C – octaedro; D – dodecaedro; E – icosaedro)

composição dos seres vivos (corpo humano, plantas e animais), além de cobrir 70% da superfície do planeta e que para Platão esta é representada pelo icosaedro, existe alguma relação entre esta molécula, a forma hexagonal de uma série de estruturas da natureza, as cadeias das moléculas orgânicas e a matemática? A proporção áurea é a resposta.

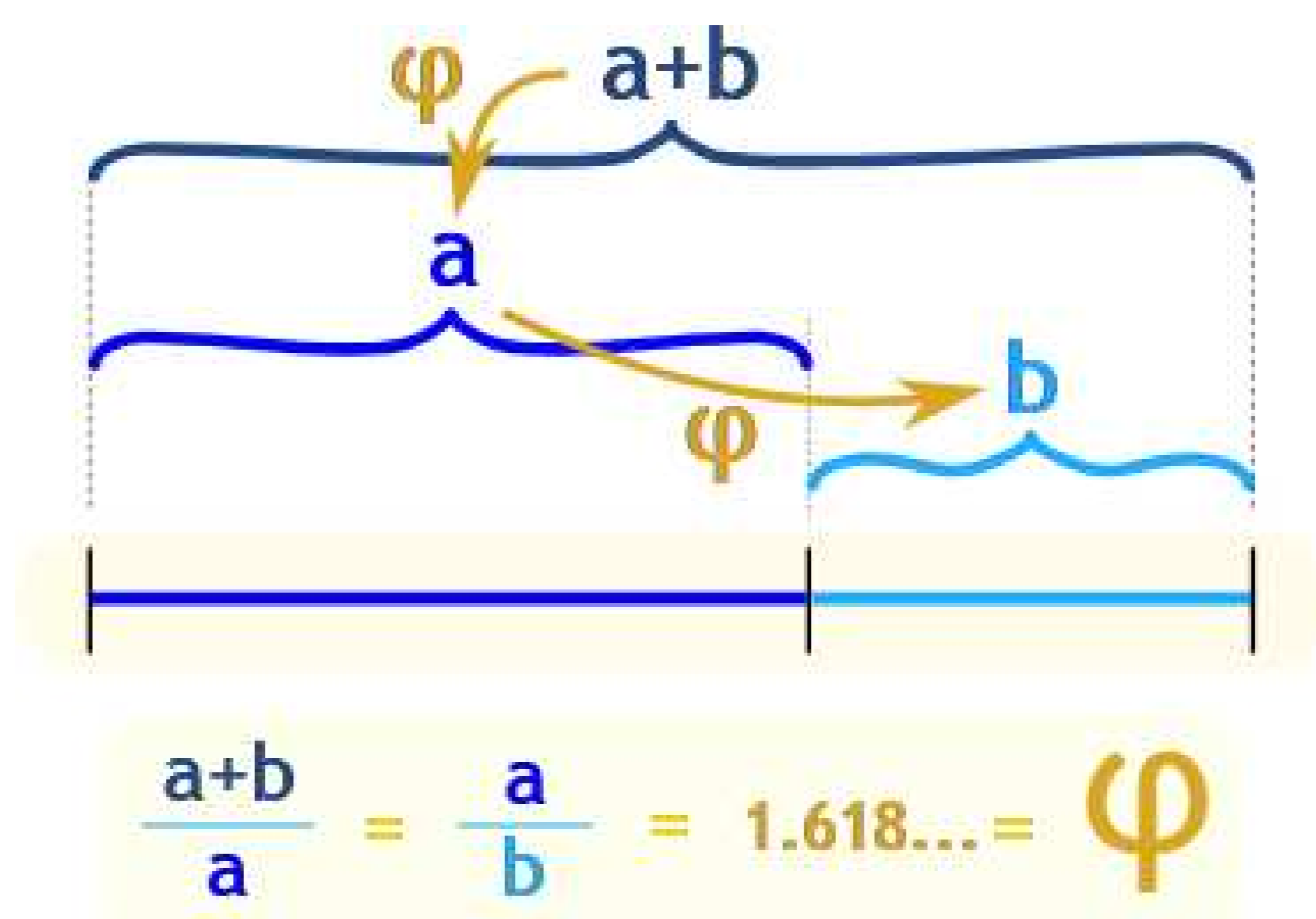
Verdade, beleza e divindade estão relacionadas... Um artista busca a verdade na beleza e um cientista procura pela beleza na verdade, com este pensamento dá para compreender que desde a Grécia antiga, período em que foi definida e formulada a razão de ouro, este fenômeno matemático é considerado o mais forte

laço entre a matemática e as artes visuais e pode ser visto em toda natureza como conchas, plantas, flores e animais (Cassela, André e Cabrera, 2021; Farinha e Oliveira Alves, de, 2024; Thapa e Thapa, 2018). A obra de arte icônica de Leonardo da Vinci, “A Mona Lisa”, bem como “A anunciação”, “Madonna com crianças e santos” e “São Gerônimo”, são pinturas onde a razão áurea prevalece (Thapa e Thapa, 2018) e as posições do ballet clássico (4º posição dos pés, pose de arabesque, sissonne atitude e pose de dégagé, estão relacionadas com a espiral de Fibonacci, evidenciando a presença da razão áurea (Farinha e Oliveira Alves, de, 2024).

A razão de ouro/proporção áurea é um número irracional, aproximadamente igual a 1,618 ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), representado pelo símbolo grego conhecido como *phi* (φ) (Farinha e Oliveira Alves, de, 2024; Thapa e Thapa, 2018).

A idéia por trás da proporção áurea é: se uma linha é dividida em 2 partes, só existe um único ponto que satisfaça a razão da maior parte com a menor parte que deve ser igual a razão do maior comprimento e a maior

parte (Figura 2).



Demonstração algébrica – considere $\frac{a}{b} = x$

$$x = \frac{1+x}{x} \quad \therefore \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{a}{b} = \varphi = 1,6108339887498848 \dots$$

Figura 2 – Entendendo a proporção áurea (“Golden Ratio”, [s.d.]

Crenças religiosas como Rosa Cruz, a organização fraternal Maçonaria e o movimento New Age associam a matemática à natureza sagrada (Brito e Dalcin, 2023), o símbolo de meditação indiano, Sri Yantra (Figura 3), foi construído usando a proporção áurea (Thapa e Thapa, 2018).

Como curiosidade, cabe mencionar que Peter Lenz (1832-1928), artista alemão desenvolveu uma teoria da

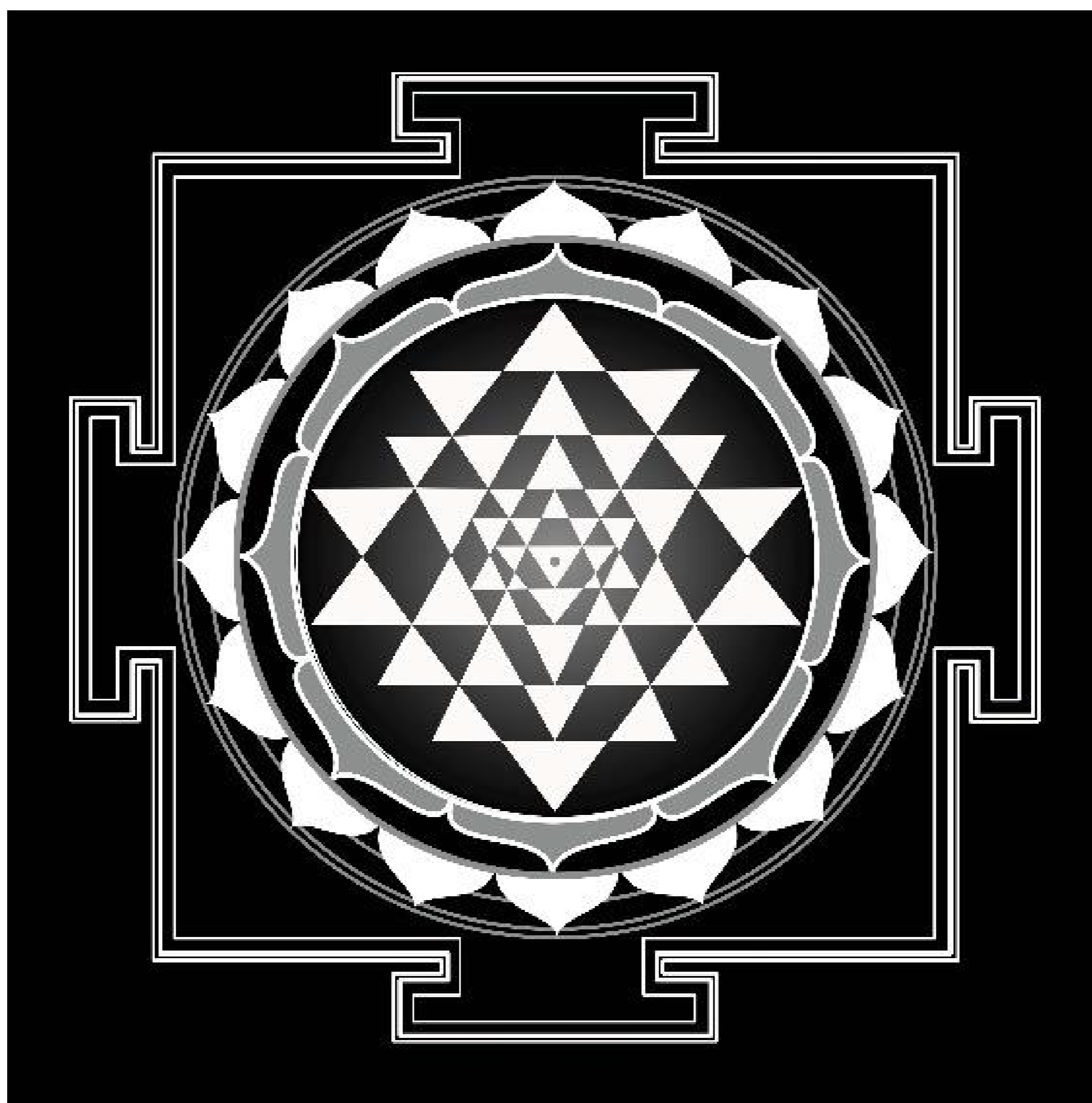


Figura 3 - Sri Yantra (<https://www.etsy.com/>)

Como curiosidade, cabe mencionar que Peter Lenz (1832-1928), artista alemão desenvolveu uma teoria da geometria mística baseada na reconstrução da linguagem de Deus para criação do mundo, com três componentes básicos o quadrado = Pai, o triângulo = Sol e a circunferência = Espírito Santo, em conjunto, expressando a divindade e é encontrado no templo Doric, no Parque Guell (Barcelona/Espanha), (RIUS SANTAMARIA, 2020).

Ao ouvir a associação da geometria com o sagrado, para muitos a matemática não ocorre e para outros, a geometria sagrada é o vínculo entre o mundo humano

com o mundo divino, por meio de proporções e relações harmoniosas, como a representação das 4 dimensões (Lambda de Platão), ponto (dimensão zero), linha (uma dimensão), plano (2 dimensões) e sólido (três dimensões) e alguns sistemas de proporções como a proporção áurea (Silva, De e Amarakoon, 2020).

No corpo humano, a razão áurea ou razão antropométrica divina é observada no DNA, coração, dentição e mecânica musculoesquelética, bem como nas medidas dos membros superiores sendo o homem Vitruviano (Figura 4), obra de Leonardo da Vinci, a representação da perfeita harmonia do corpo humano (Alzyoud *et al.*, 2022).

Considerando que a proporção áurea está presente nas ciências das artes, saúde e exatas, estão sendo propostas práticas de ensino explorando ϕ (phi), que serão apresentadas no próximo capítulo.

Para o leitor, inicialmente pode ser visto a não associação da proporção áurea com a temática abordada, a molécula da água. Mas, analise a relação

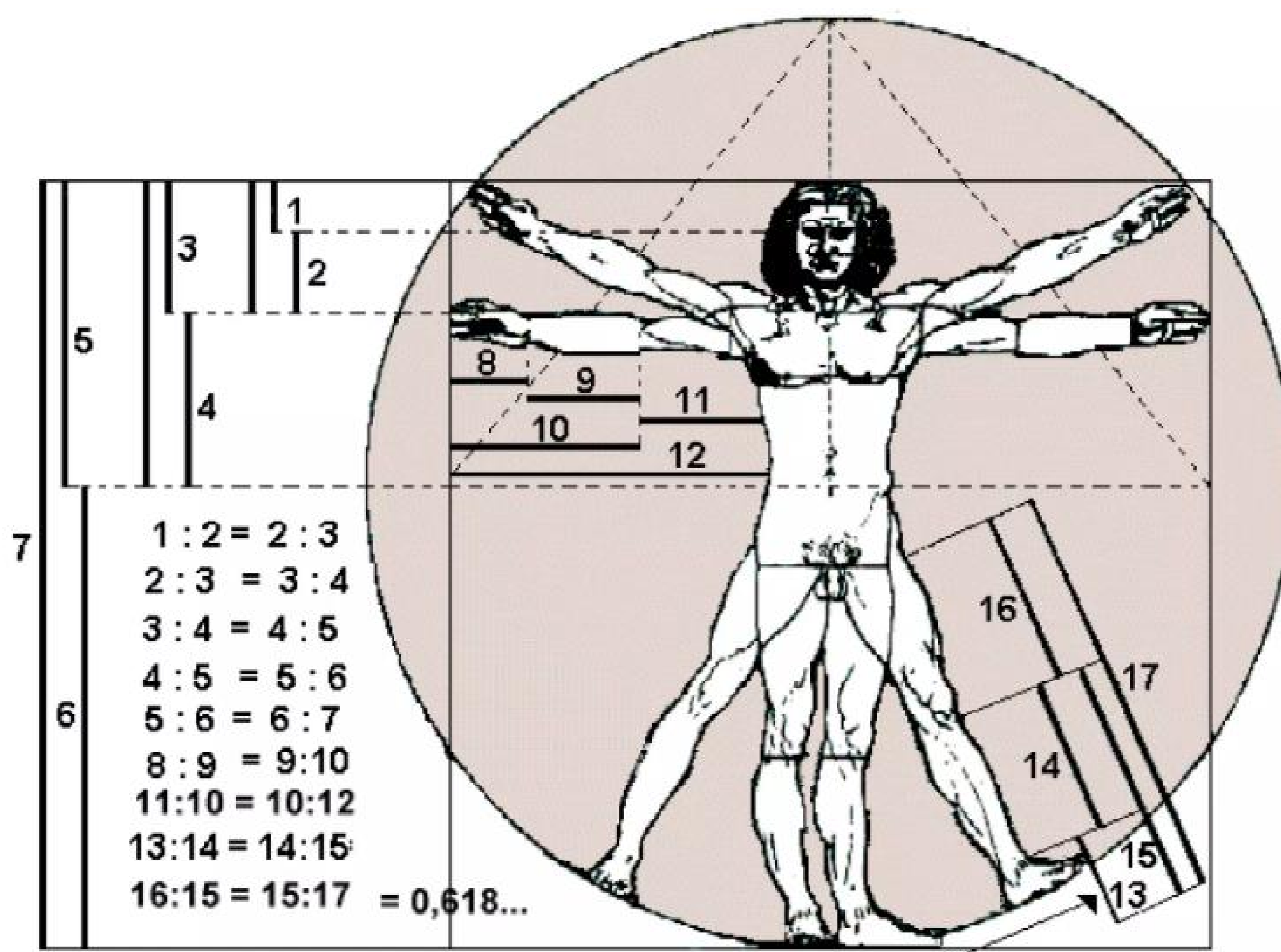
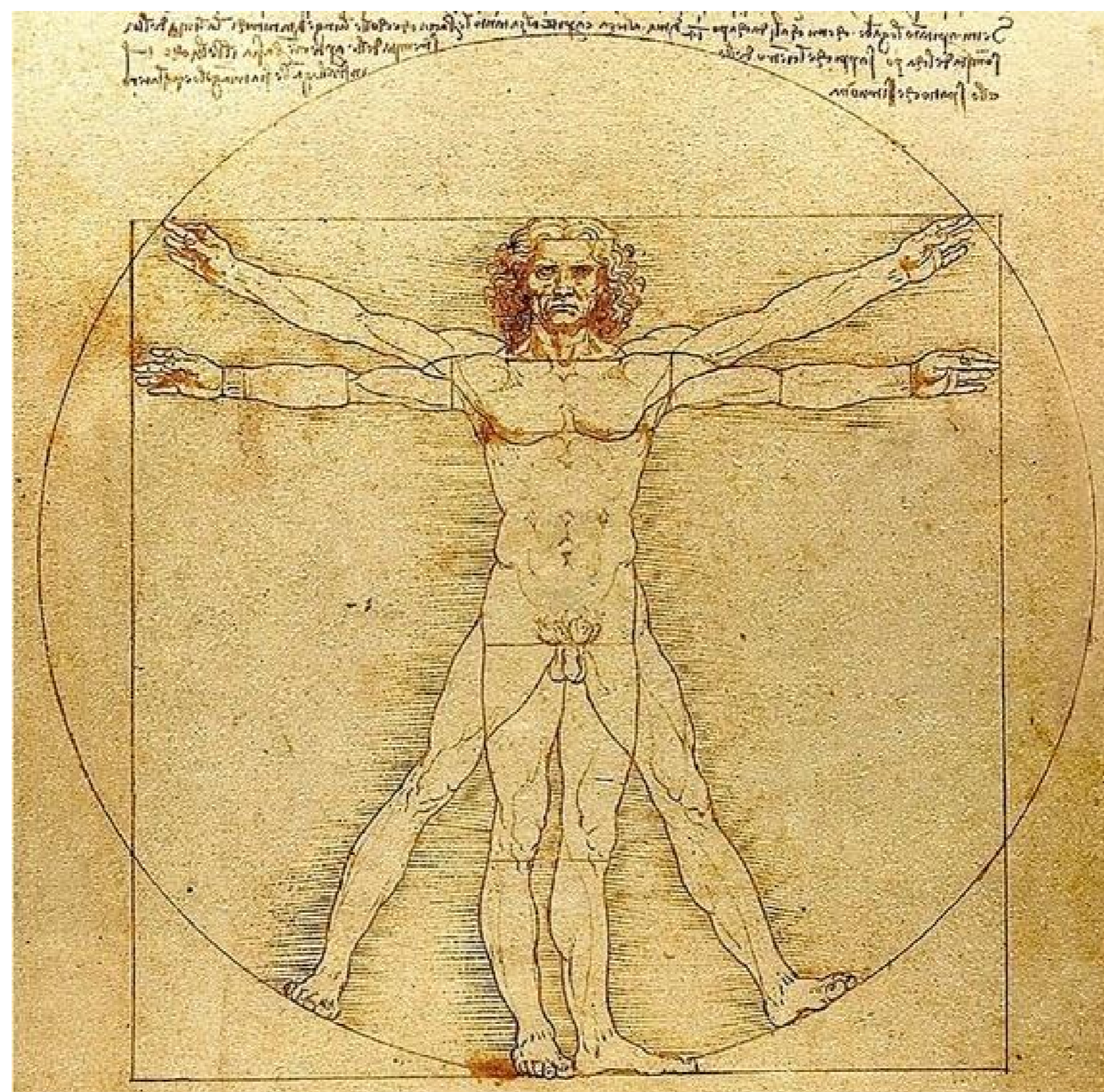


Figura 4 – Homem vitruviano, Leonardo da Vinci

da água com a proporção áurea quando se considera a forma que se visualiza a geometria na natureza, onde a harmonia e beleza se fazem presentes na observação do movimento da água nos mares e rios, na estrutura cristalina do gelo e nos padrões naturais estabelecendo

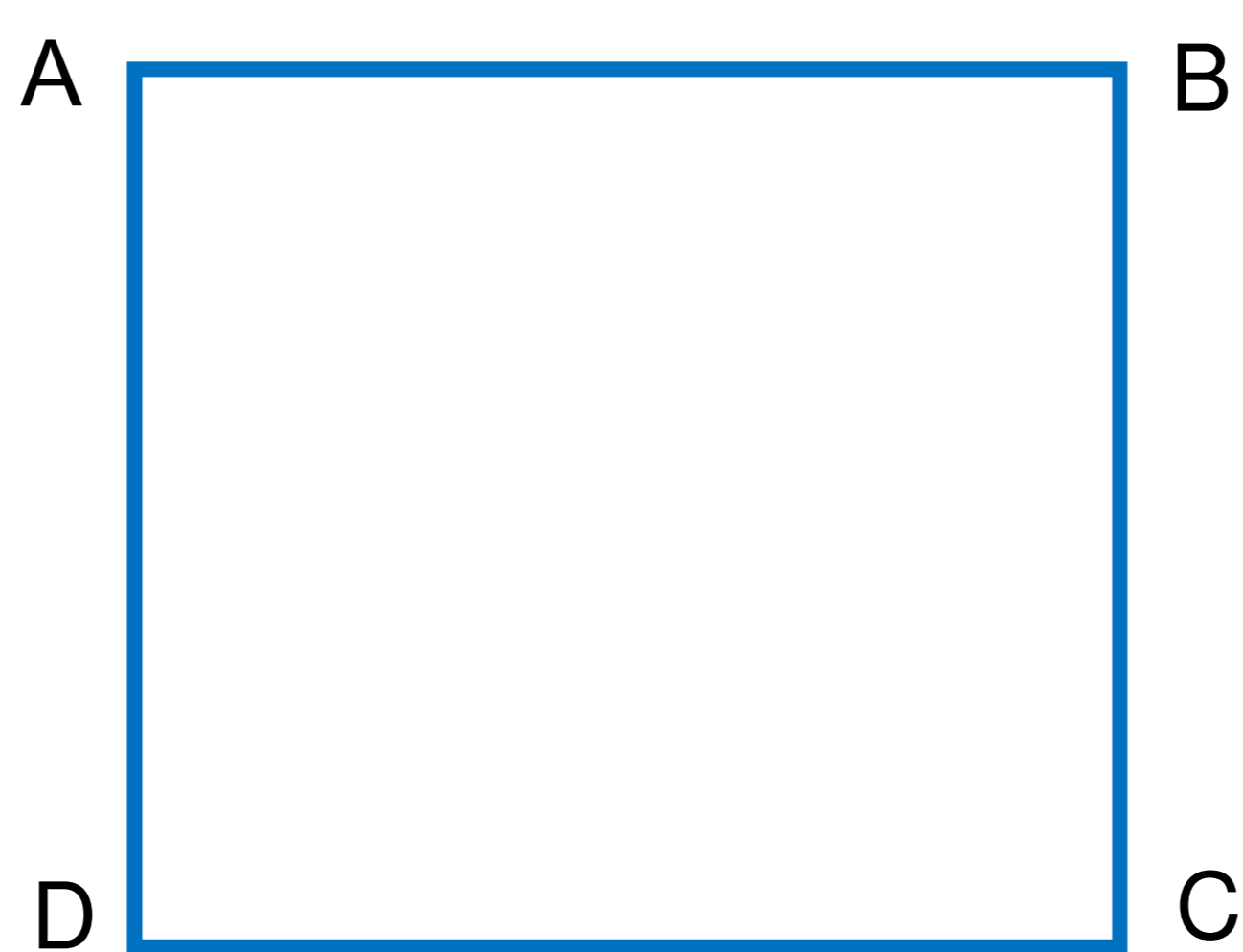
H 20

uma “ordem” geométrica na natureza e na interação da água com as demais estruturas dos seres vivos (University of Cambridge, [s.d.]), inclusive na anatomia do coração (Henein *et al.*, 2011). Uma boa forma de perceber esta relação é a partir do vídeo [Nature by Numbers](#) (Cristóbal Vila, [s.d.]).

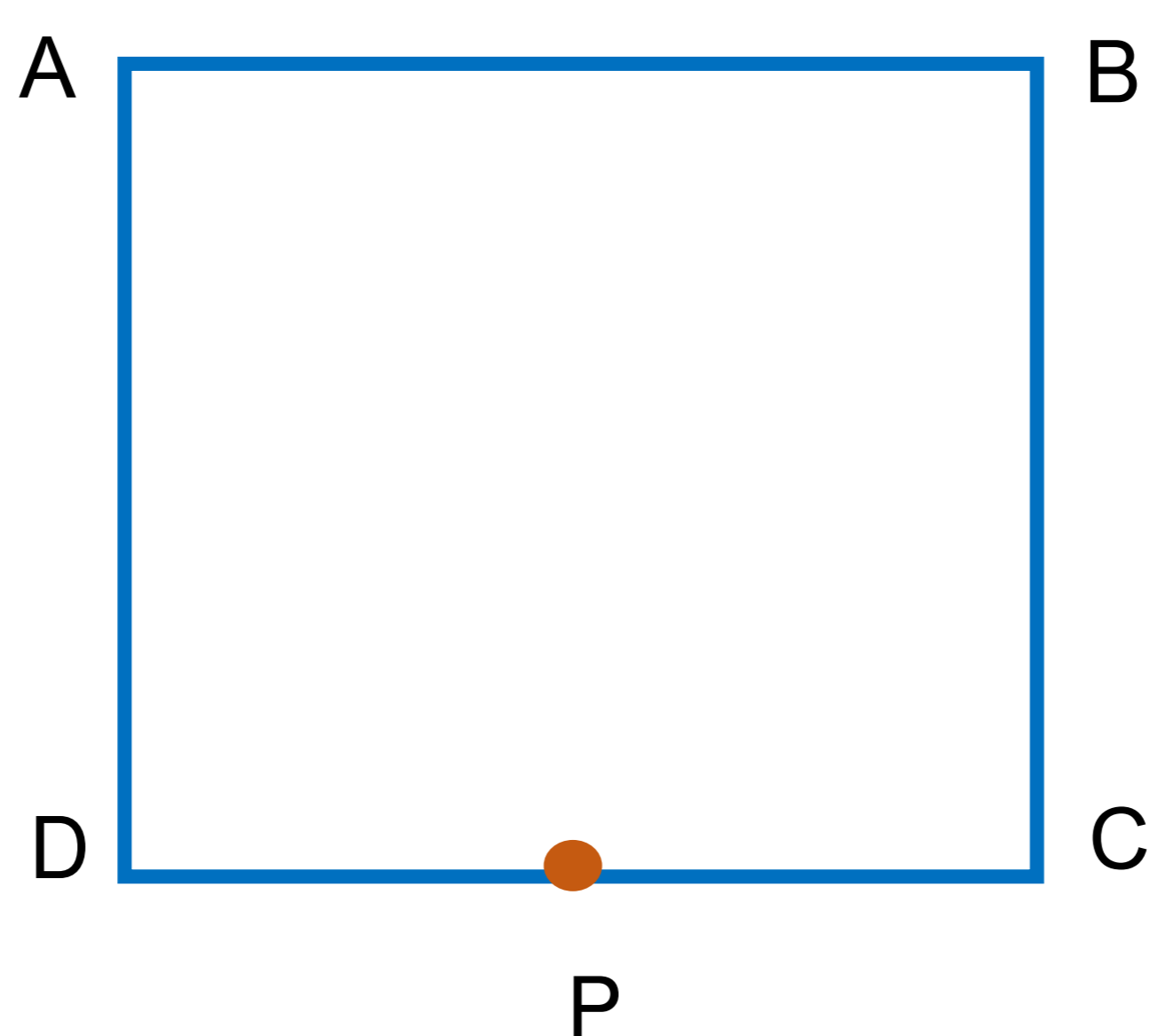
CAPÍTULO 4 - PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO PROPORÇÃO ÁUREA

1 – Construindo o retângulo áureo

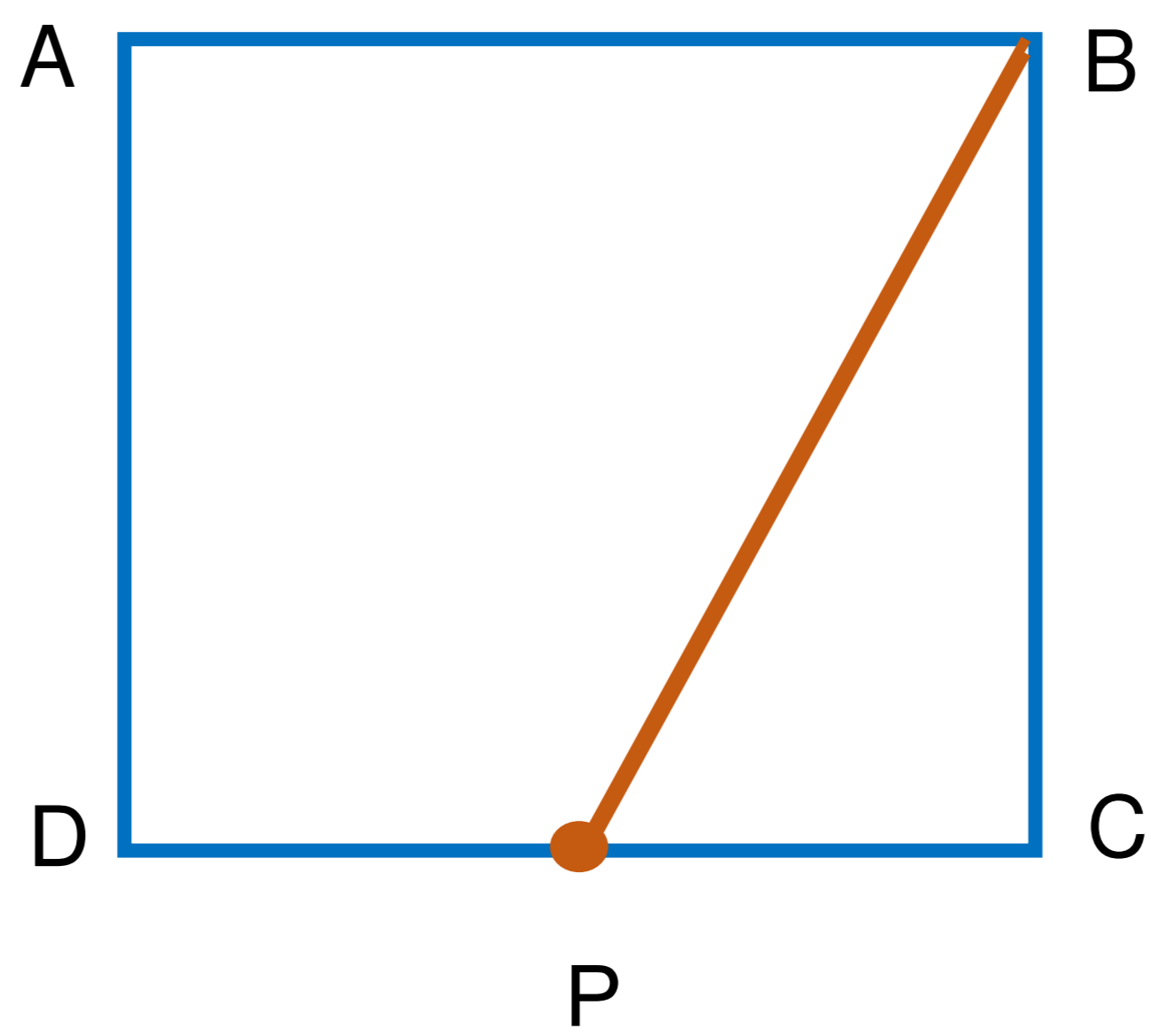
- a) Desenhar um quadrado identificando todos os seus vértices



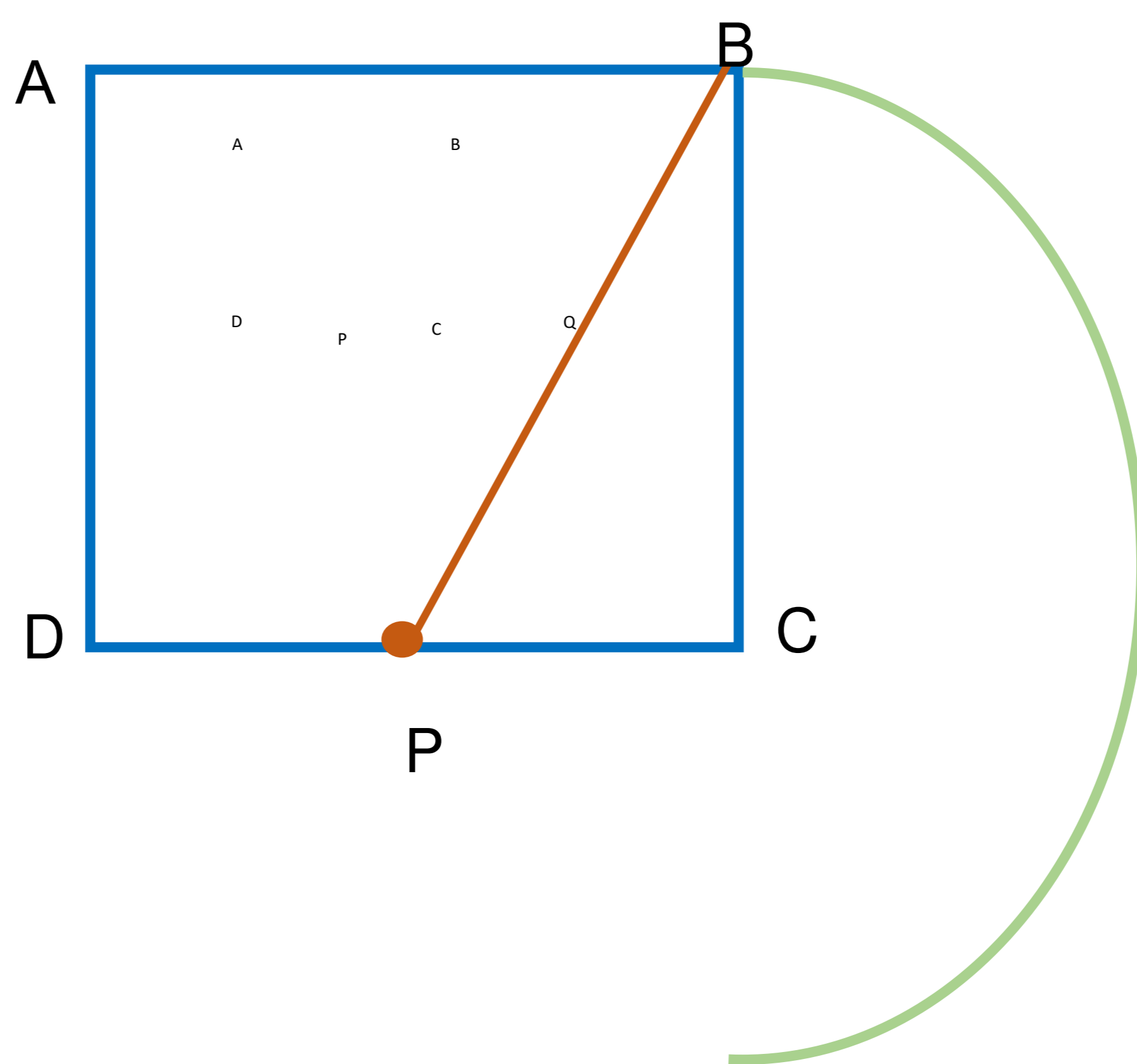
- b) Em seguida, localizar o ponto médio em qualquer dos lados do quadrado



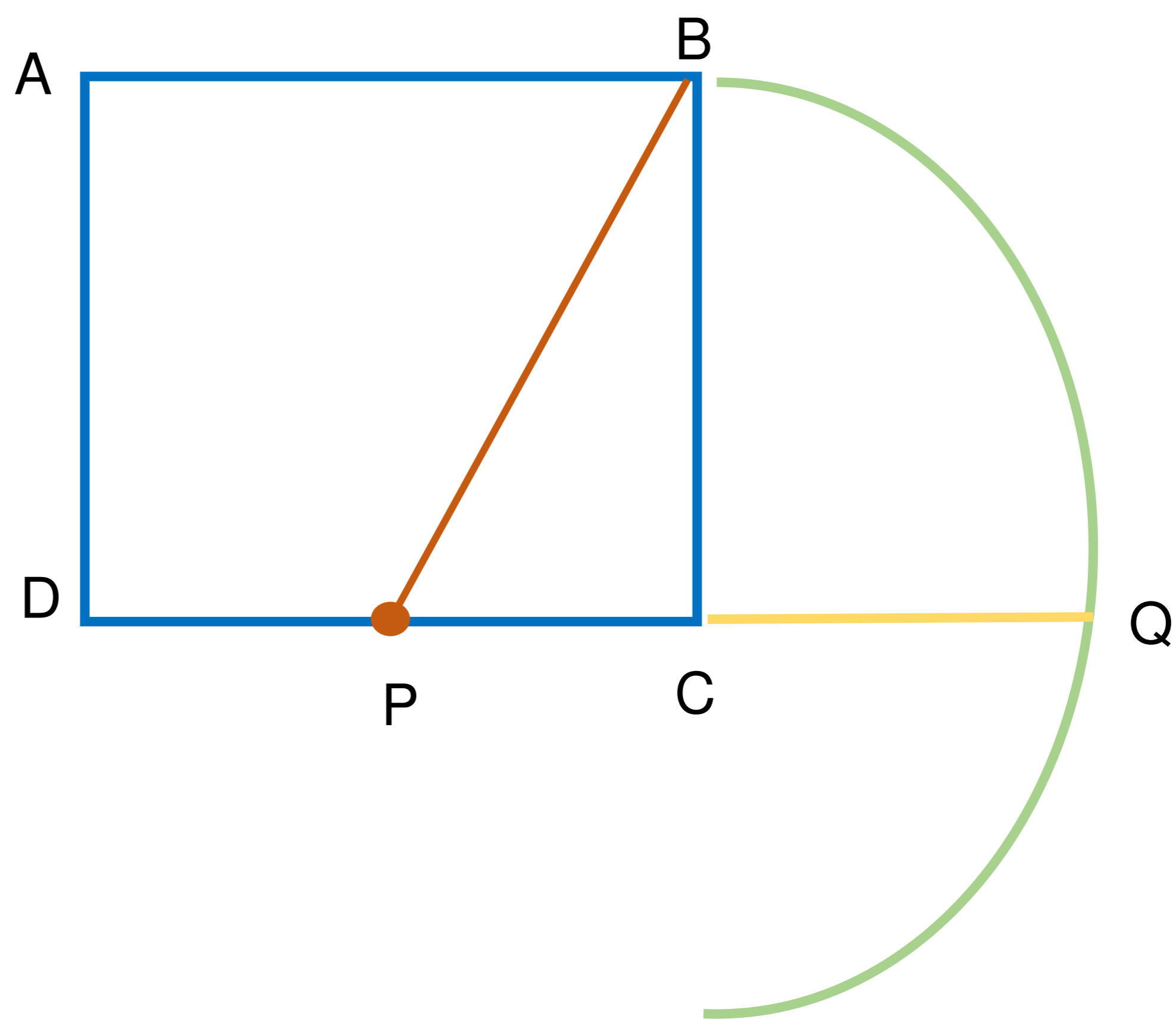
- c) Na sequência, fazer a ligação do ponto médio a um dos vértices do lado oposto



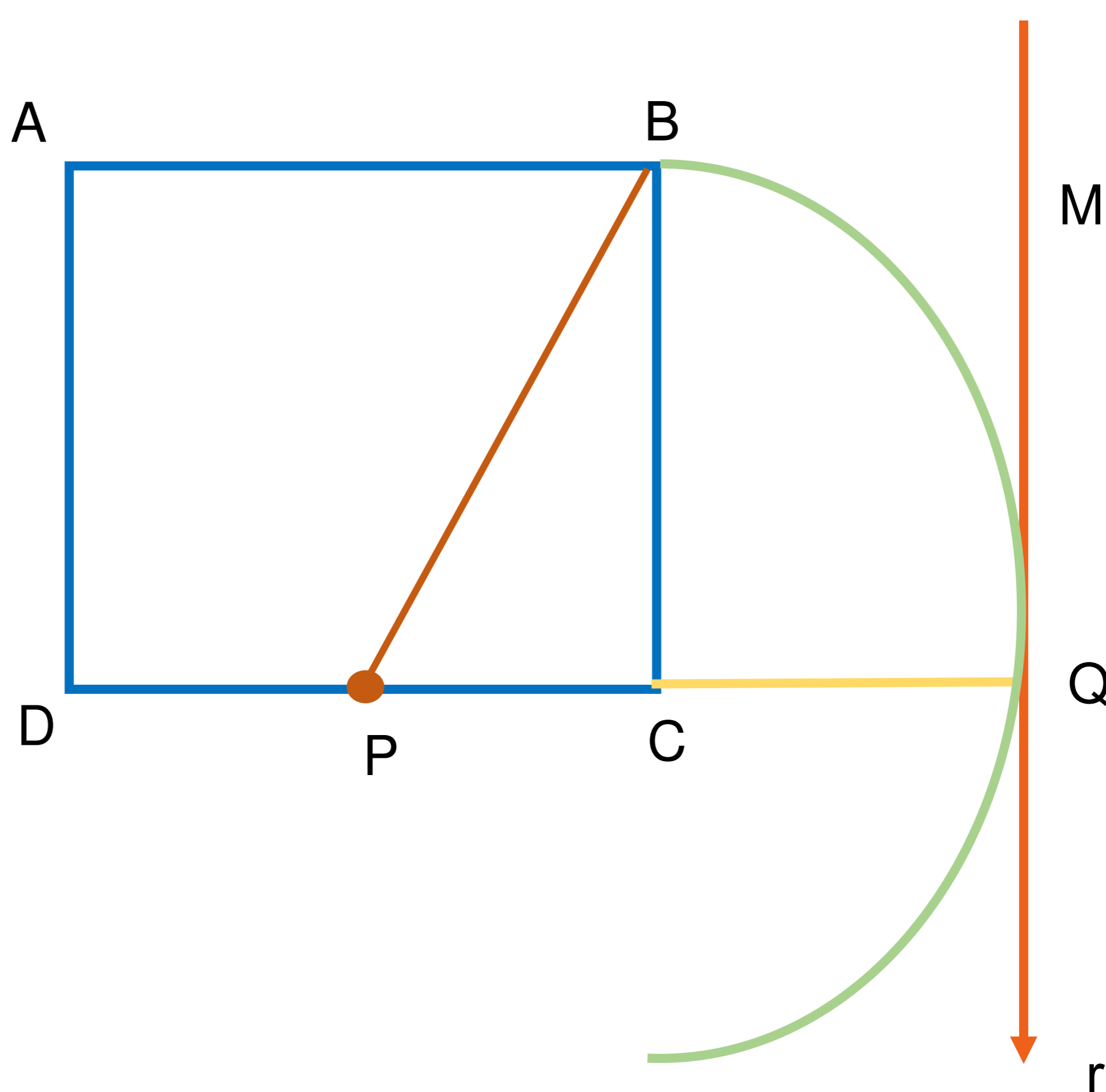
d) Utilize um compasso para traçar uma semicircunferência com a ponta seca do compasso em P e o lápis em B, considerando o vértice C



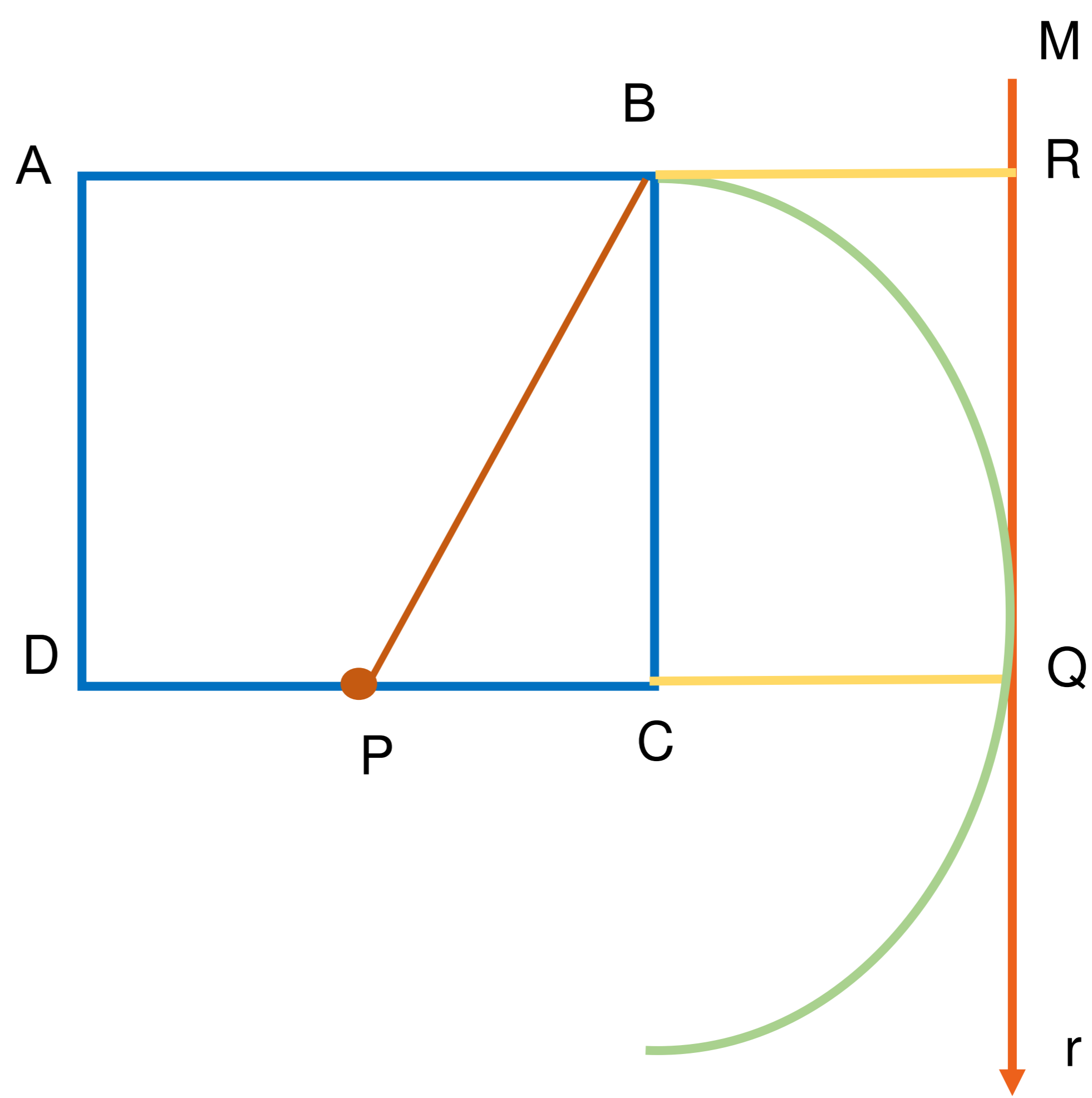
e) Prolongar o segmento DC até intersectar com a semicircunferência



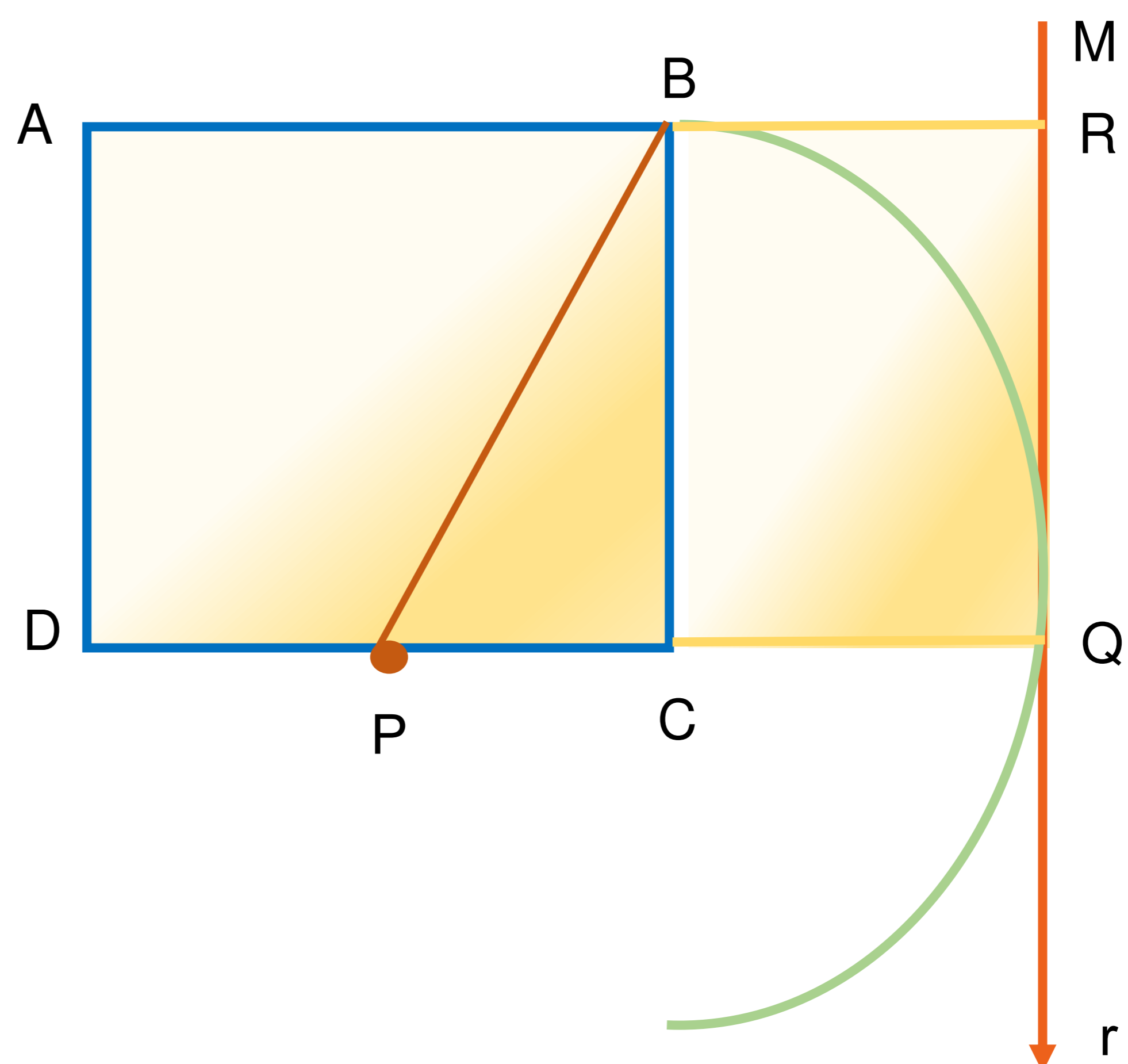
f) Traçar uma semirreta paralela ao lado BC e que intersecte com Q



g) Complete o retângulo CQRB, prolongando o segmento AB até intersectar com a semirreta r

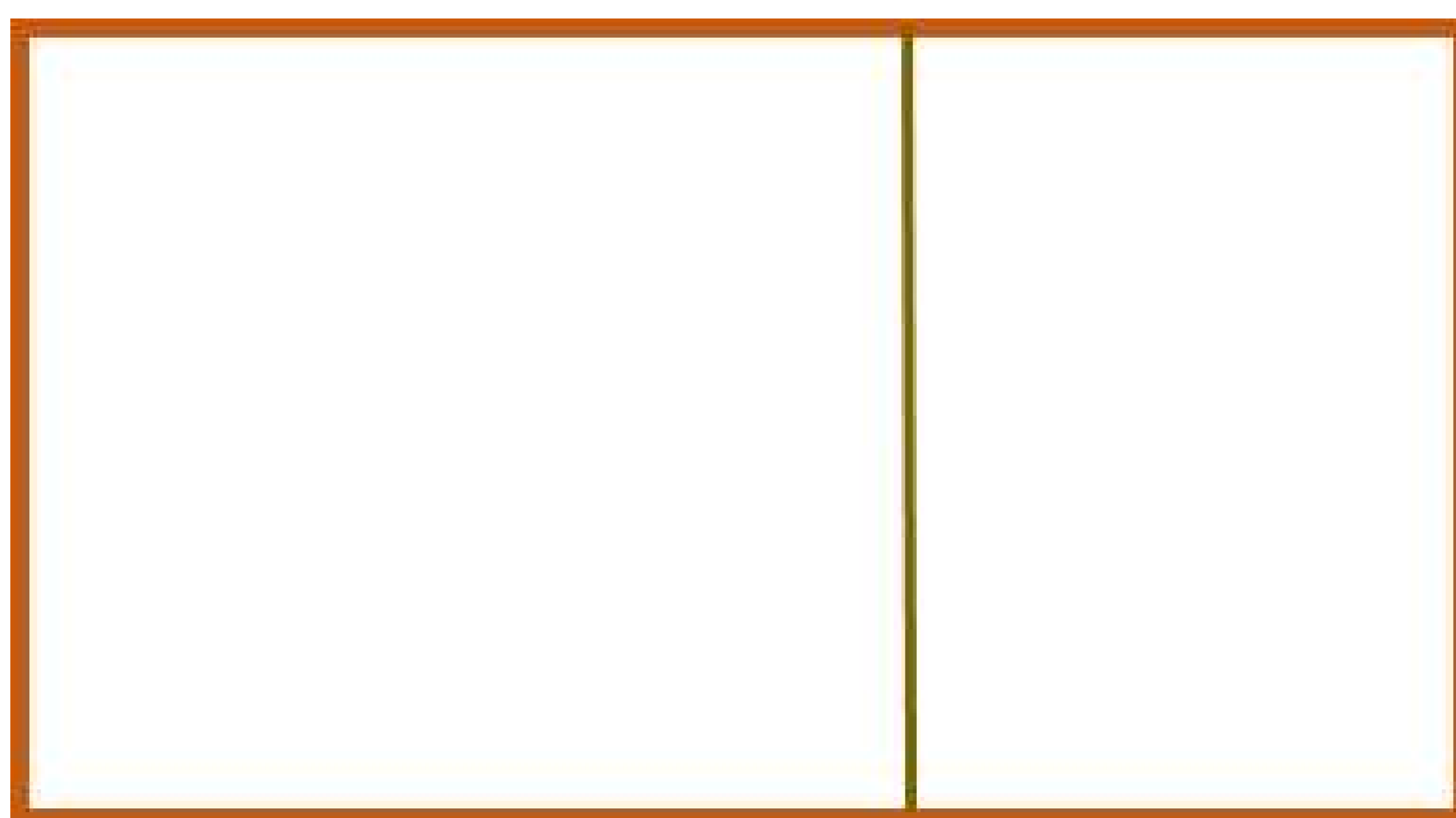


h) Para finalizar, verificar se a proporção do lado menor (RQ ou AD) com o lado maior (AR ou QD) é *Phy* (φ)

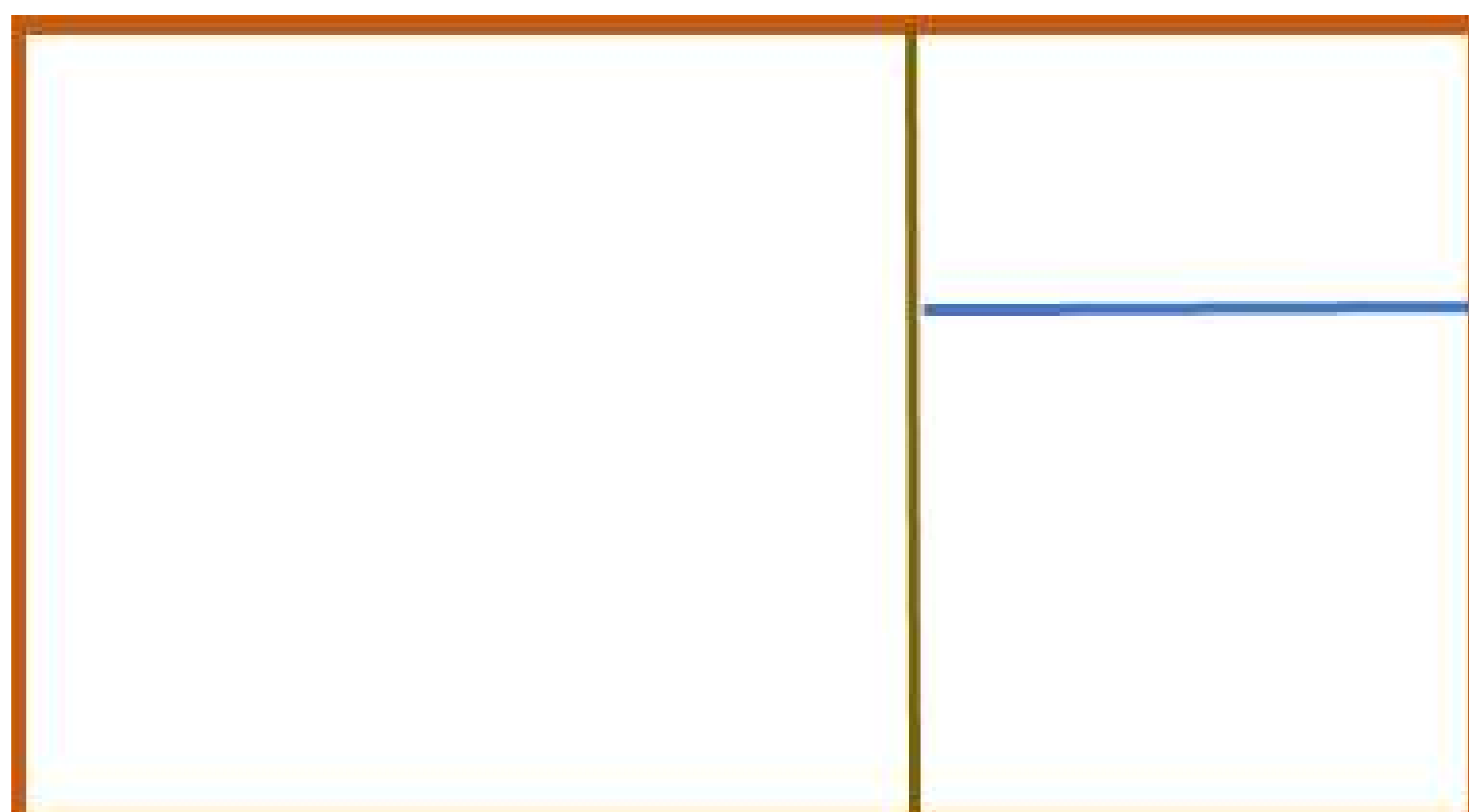


2 – Aplicando a proporção áurea na divisão harmônica do espaço.

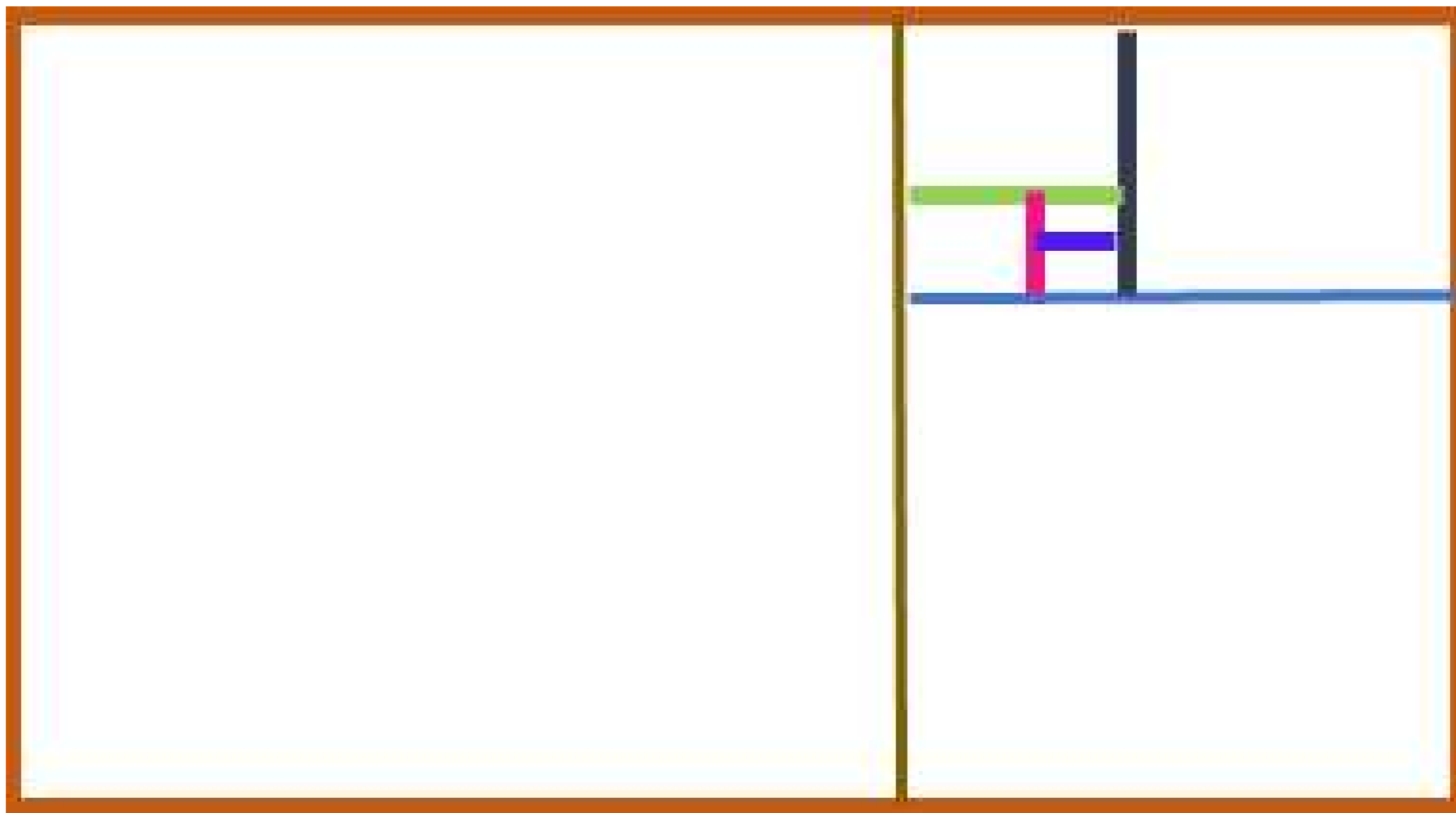
- a) Aplicar a proporção áurea em um retângulo áureo, dividindo o retângulo em 2, respeitando a proporção áurea



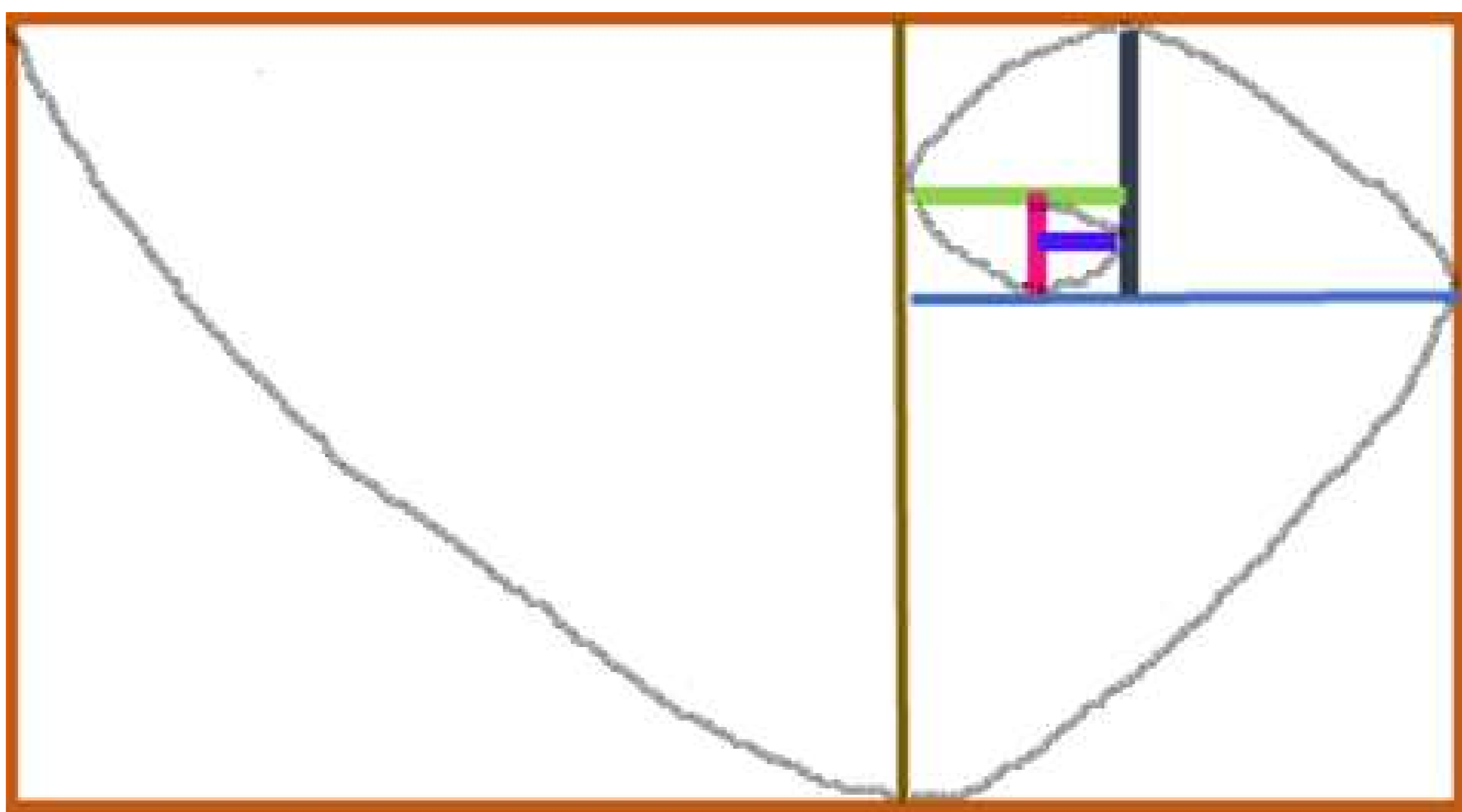
- b) Dividir o retângulo menor em 2, respeitando a proporção áurea



c) Na sequência, repetir o procedimento do item b até quando for possível



d) A partir do ponto A traçar uma espiral, sempre no sentido do vértice oposto do quadrado



A construção também pode ser apresentada utilizando o geogebra ([Espiral de Durero. – GeoGebra](#))(María, [s.d.]).

Como curiosidade, está sendo indicado um vídeo que orienta a aplicação da proporção áurea na criação de personagens e ainda associado a grandes obras artísticas ([PROPORÇÃO ÁUREA! COMO USAR NOS SEUS PERSONAGENS \(youtube.com\)](#))

3.– *Analizando Eletrocardiograma (ECG) a partir da proporção áurea*

a) O aluno deve fazer uma pesquisa sobre ECG

a) A partir da Figura 1 identificar o retângulo de ouro, associado aos pulsos elétricos

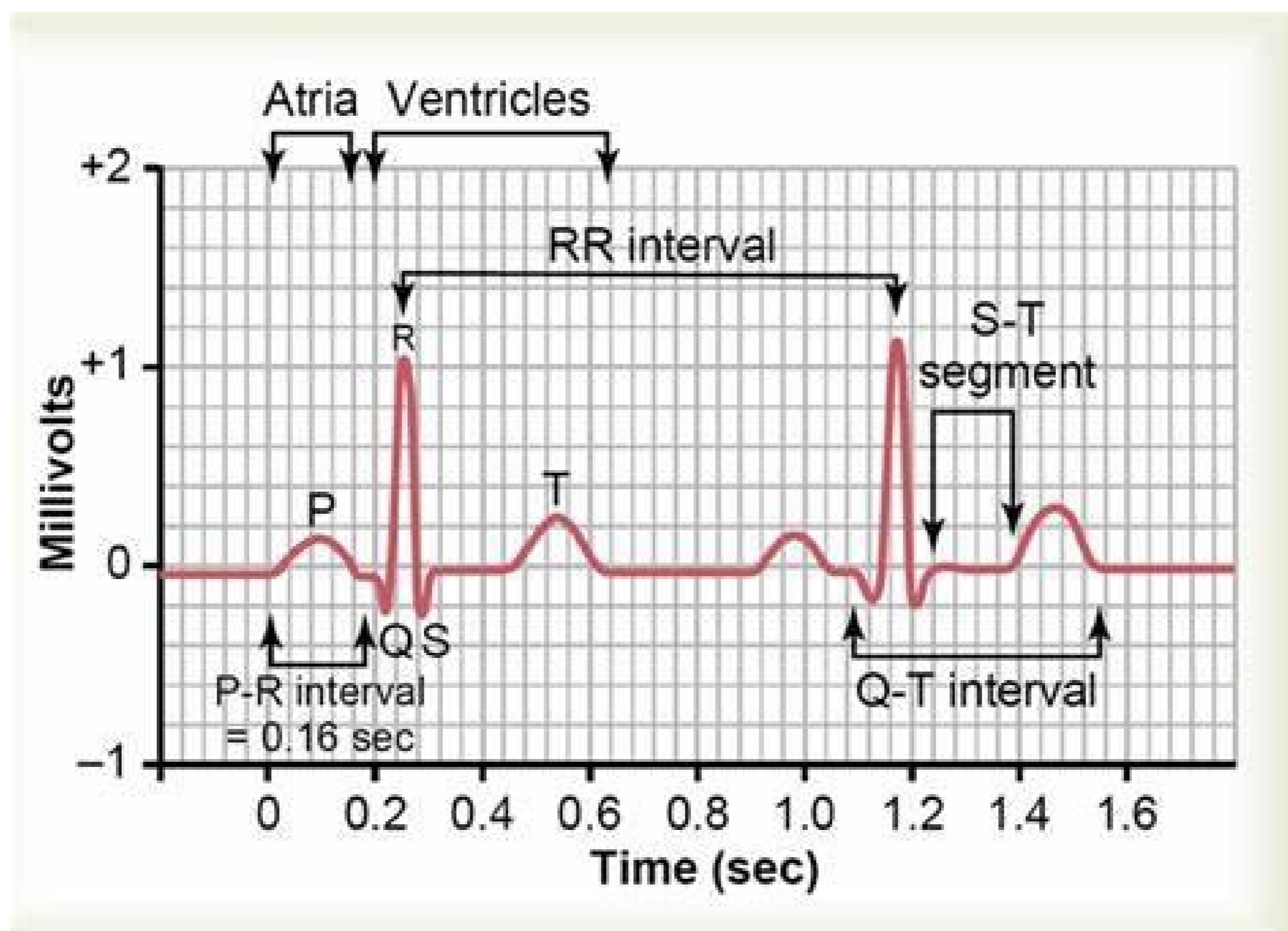


Figura 1 – Eletrocardiograma (ECG) normal, identificando normalidade na atividade elétrica do coração

c) Com a percepção de que a proporção áurea está associada a presença da onda T, analisar a Figura 2 e identificar qual ECG caracteriza o estado de normalidade do coração.

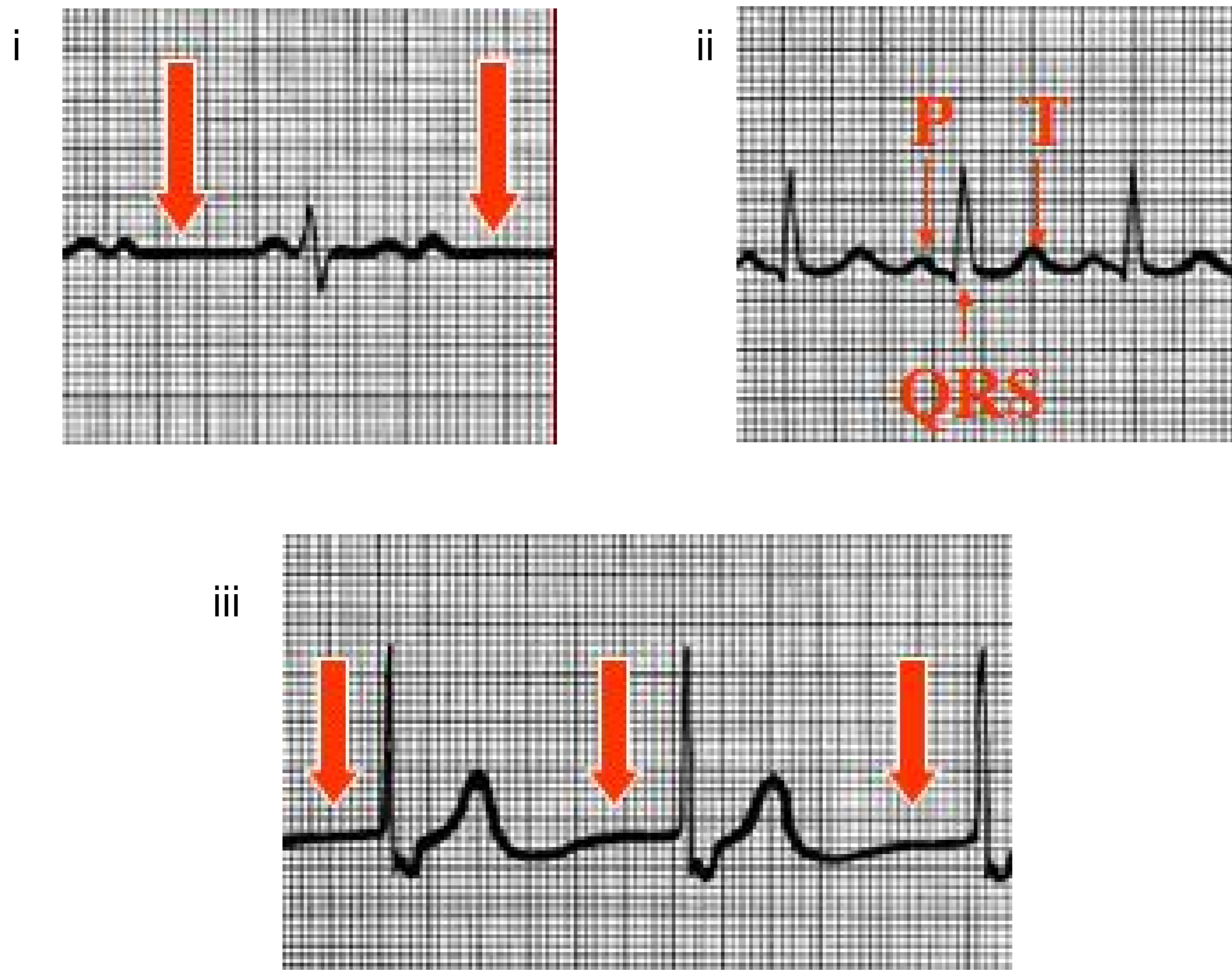


Figura 2 – Eletrocardiograma normal (ii) e com irregularidades (i; iii)

CAPÍTULO 5 – REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA E A GEOMETRIA SAGRADA

A geometria sagrada é um campo de estudo que explora padrões geométricos e proporções encontrados na natureza e em estruturas criadas pelo homem, atribuindo a eles significados espirituais e simbólicos. Embora frequentemente associada a aspectos esotéricos e religiosos, a geometria sagrada também possui uma base matemática sólida que pode ser apreciada e estudada por matemáticos, como já demonstrado no capítulo anterior.

A geometria sagrada oferece uma oportunidade de explorar a interseção entre arte, natureza e matemática. Os padrões e proporções encontrados na geometria sagrada são exemplos de como conceitos matemáticos podem ser aplicados de maneiras práticas e esteticamente agradáveis. Além disso, esses estudos podem inspirar novas pesquisas em geometria, proporções e simetrias, como a aplicação da constante *Phi* em conjunto com outras medidas antropométricas como peso e índice de massa corporal para melhor

H 20

entendimento da medicina forense, fisioterapia e imagens médicas (Alzyoud *et al.*, 2022), bem como aliada ao ângulo de ouro ($137,5^\circ$) para analisar a saúde do coração, através das dimensões vertical e transversa, podendo vir a ser um valioso marcador para identificação de anormalidades cardíacas anatômica e funcional (Henein *et al.*, 2011; Yalta, Ozturk e Yetkin, 2016).

A geometria sagrada continua a ser um elemento vital na arquitetura, tanto histórica quanto moderna. Seu uso transcende meros aspectos estéticos, promovendo um ambiente que ressoa com harmonia e espiritualidade, tendo influenciado na construção de templos, igrejas, mesquitas, e outros edifícios sagrados: pirâmides do Egito (especialmente pirâmide de Gizé), templo de Salomão, Parthenon, catedrais góticas, templos hindus e budistas e a sagrada família, obra do arquiteto contemporâneo Gaudi (Mitra e Sadhukhan, 2020; Raghani, Brar e Kamal, 2021).

Ao ensinar a matemática, o professor deve ter em mente que daqueles alunos podem surgir profissionais

de diversas áreas e, mostrar o potencial da visão matemática, além dos números e algoritmos passa a ser uma responsabilidade social visando ampliar a percepção não somente por esta ciência, mas pelas transformações da natureza, a beleza e a técnica das construções e, a simbologia que, no mínimo, remete a pensamentos filosóficos e conhecimento histórico social, participando na formação crítica do estudante. Assim, é importante que o professor, ao ensinar a matemática, tenha uma mente aberta e utilize o misticismo, a geometria sagrada e sua relação com a filosofia como uma das formas para atrair a atenção do aluno à matemática e, principalmente, ampliar a visão do estudante quanto a importância desta ciência e com isto aumentar seu interesse no estudo desta matéria..

CAPÍTULO 6: SOLUBILIDADE DA ÁGUA E SUA RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA

Uma substância (soluto) é solúvel em uma outra substância (solvente), quando ao misturar soluto + solvente formar uma mistura homogênea, ou também conhecida como solução homogênea, ou seja, somente é visível uma fase na solução (Jhonilson Pereira Gonçalves, [s.d.]).

É fácil compreender tal conceito ao pensar na mistura da água com óleo, que formam uma solução heterogênea (2 fases) e na solução supersaturada de sal (cloreto de sódio) ao misturar uma proporção de NaCl em água superior a 36g/100mL (Diogo Lopes Dias, [s.d.]).

Vários são os fatores que influenciam no processo da solubilidade (Figura 1) de uma substância como temperatura, pressão, agitação e, ainda, a natureza da substância (Jhonilson Pereira Gonçalves, [s.d.]).

Solubilidade



Figura 1 – Etapas do processo de solubilidade (“Solubilidade”, [s.d.]

A dissolução do cloreto de sódio (NaCl) em água ocorre a partir da interação íon-dipolo (Figura 2) e o sal de cozinha tem no mínimo 99,5% NaCl.



Figura 2 – Interação íon-dipolo (dissolução NaCl em água)

A sacarose (açúcar refinado tem no mínimo 99% sacarose) é feita a partir de pontes de hidrogênio, promovendo interações intermoleculares, resultando no processo de solvatação (não há formação de uma nova substância) (Figura 3)(Mayara Cardoso, [s.d.]).

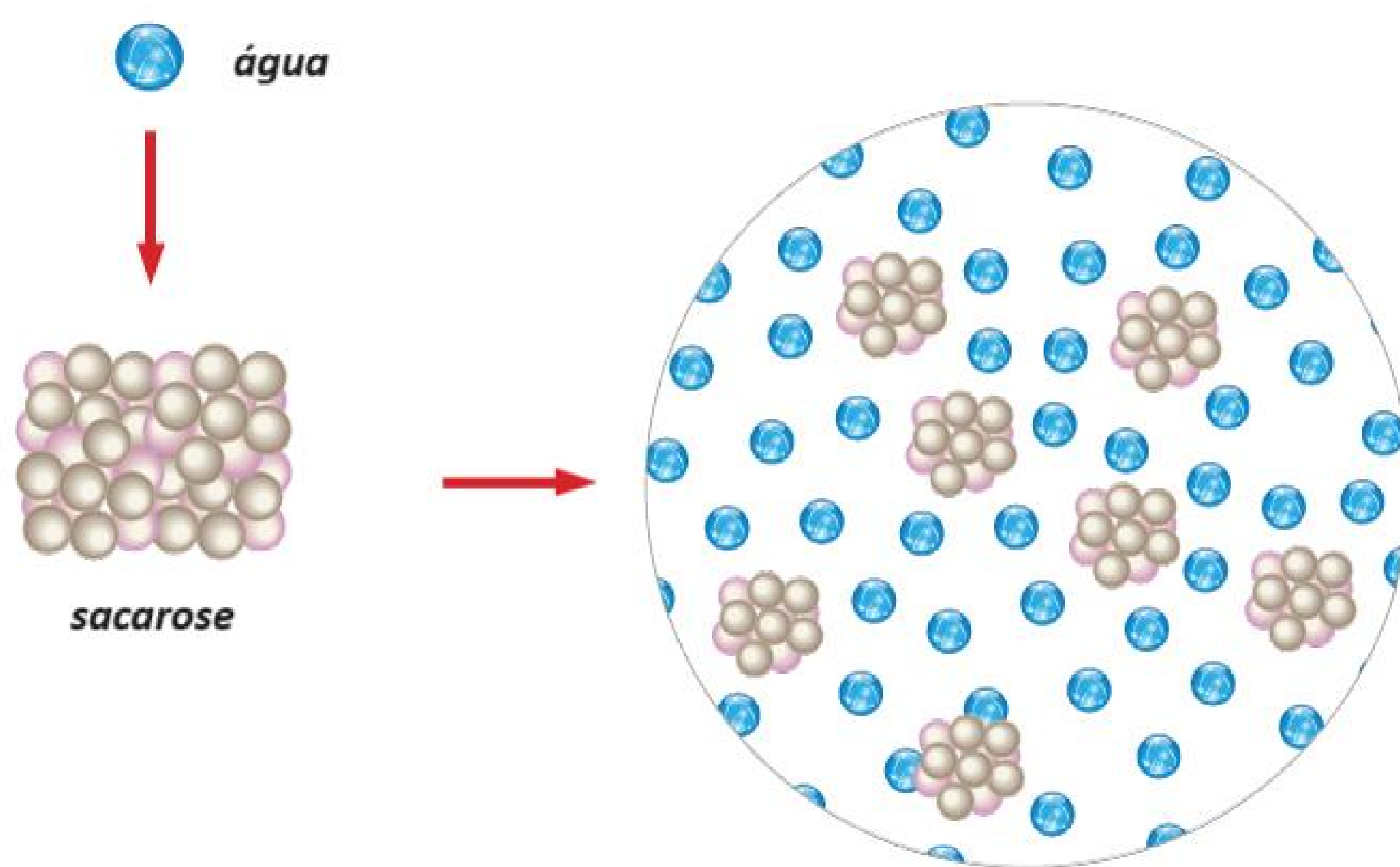


Figura 3 – Solvatação da sacarose

Considerando os diversos fatores envolvidos no processo de interação de substâncias com a água, resultando na solubilidade, estão sendo propostas práticas de ensino que serão apresentadas no próximo capítulo.

Sugere-se, em acordo com o nível de escolaridade que serão aplicadas as práticas de ensino propostas, que

seja feito um trabalho conjunto com a disciplina de química/ciências.

CAPÍTULO 7: PRÁTICAS DE ENSINO ENVOLVENDO DISSOLUÇÃO EM ÁGUA

1.– *Conhecendo a dissolução da sacarose em água na temperatura ambiente*

Utilizando colher medidora e travessa de vidro (base larga) (Figura1) promova a dissolução das quantidades de açúcar e água, seguindo os procedimentos a seguir:



Figura 1 – Material sugerido para dissolução de açúcar em água

i) Adicionar 200mL de água (temperatura ambiente) na travessa.

Aguardar não perceber mais movimentação da água.

ii) Medir, com a colher medidora de 1g, o açúcar. Observe que para a medida estar correta, é necessário passar a parte que não tenha serra da faca, na superfície da colher, mantendo assim apenas o açúcar que está dentro da colher (Figura 2).

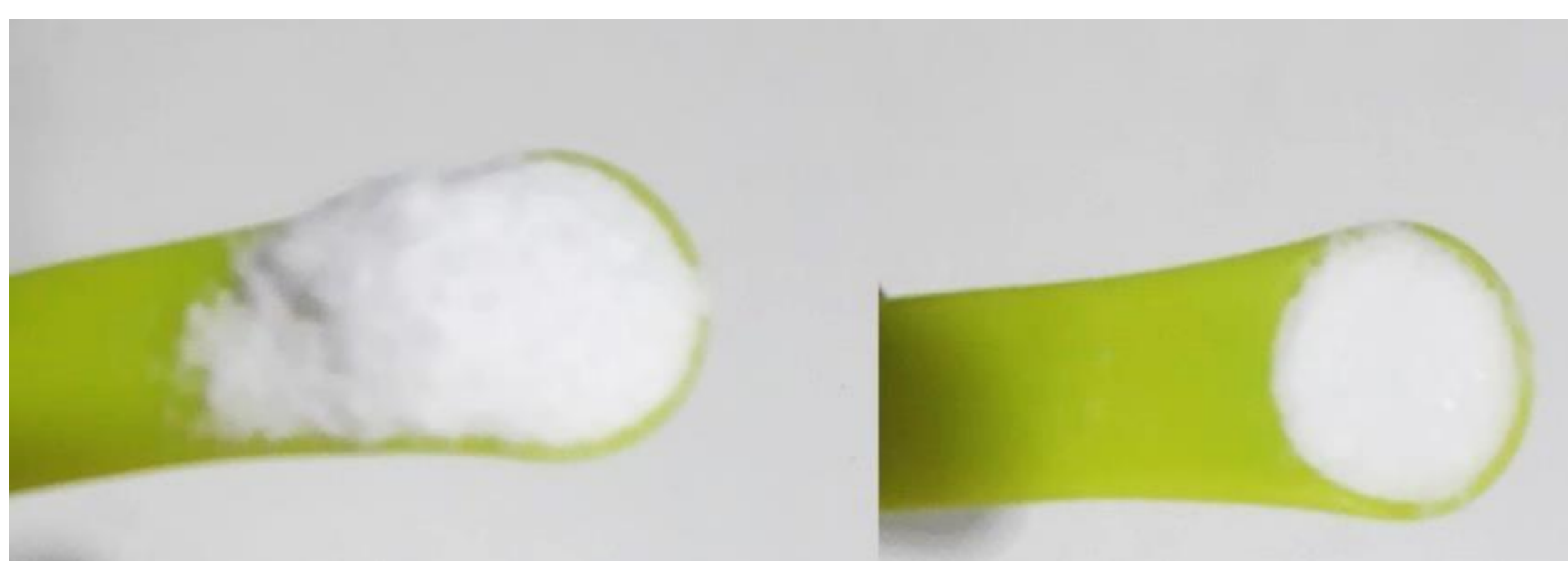


Figura 2 – Medindo açúcar corretamente

iii) Adicionar o açúcar na água e imediatamente cronometrar o tempo de dissolução. **NÃO MEXER** (Figura 3).



Figura 3 – Etapas de dissolução do açúcar em água (1g/200mL)

- iv) Anote o tempo (tabela 1)
- v) Esvazie o recipiente, lave com água e seque, para seguir para a próxima etapa
- vi) Repita o procedimento (i a v), alterando as quantidades de açúcar e água, conforme indicado na tabela 1. Preencha os dados da tabela 1

Tabela 1 – Soluções (açúcar(g)/água(ml) e seus tempos de dissolução - modelo

Solução	Quantidade de açúcar (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	
II	1	400	
III	1	600	
IV	1	800	
V	2,5	200	
VI	2,5	400	
VII	2,5	600	
VIII	2,5	800	

A tabela 2 apresenta dados produzidos experimentalmente.

- vi) Construa uma tabela representando as soluções em proporção % (g de açúcar / 100mL água) e o tempo total de dissolução em segundos (tabela 3).

Tabela 2 – Tempo de dissolução da água (temperatura ambiente)

Solução	Quantidade de açúcar (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	11' 57''
II	1	400	7'21''
III	1	600	6'53''
IV	1	800	5'30''
V	2,5	200	18'06''
VI	2,5	400	14'13''
VII	2,5	600	10'11''
VIII	2,5	800	11'12''

Tabela 3 – Modelo de tabela para relacionar tempo de dissolução e solução % (g de açúcar / 100mL de água em temperatura ambiente)

Solução	% (g de açúcar / 100mL de água em temperatura ambiente)	Tempo de dissolução (segundos)
I		
II		
III		
IV		
V		
VI		
VII		
VIII		

A tabela 4 apresenta dados produzidos experimentalmente.

Tabela 4 – Tempo de dissolução (segundos) de soluções com diferentes proporções % de açúcar (g de açúcar / 100mL de água em temperatura ambiente), dados experimentais

Solução	% (g de açúcar / 100mL de água em temperatura ambiente)	Tempo de dissolução (segundos)
I	0,5	717
II	0,25	441
III	0,167	513
IV	0,125	330
V	1,25	1806
VI	0,625	853
VII	0,417	611
VIII	0,313	672

vii) Com o auxílio do Excel, traçar um gráfico de dispersão com os dados obtidos na tabela 3. Analisar as opções das linhas de tendência, exponencial, linear e logarítmica e responda: qual função descreve a dissolução da sacarose em água? Qual a equação do gráfico?

A Figura 4 apresenta se refere aos dados produzidos experimentalmente (tabela 4).

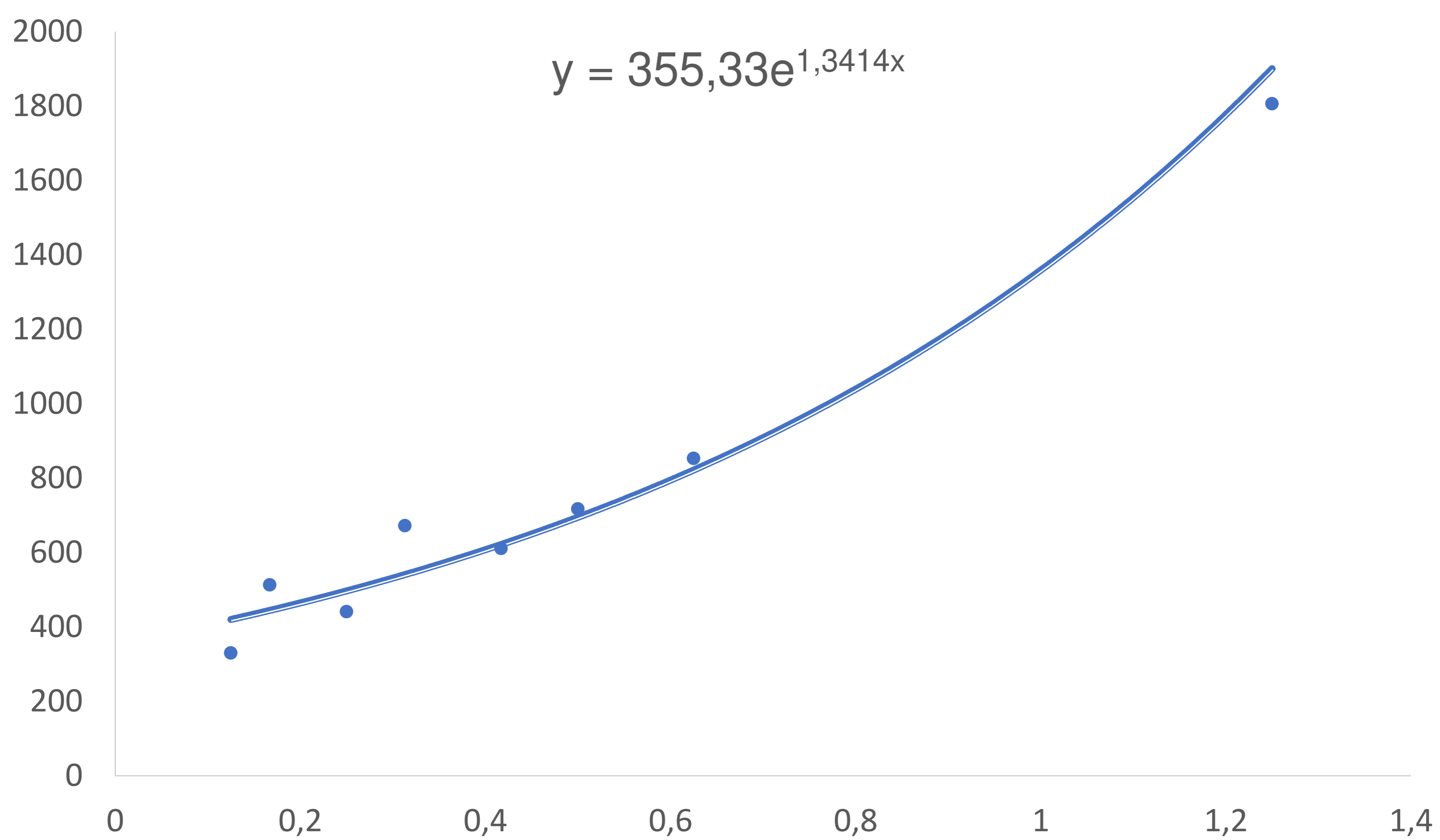


Figura 4 – Equação associada a dissolução da sacarose em água, com os dados da tabela 2

2 – *Conhecendo a dissolução da sacarose em água aquecida*

Utilizando colher medidora e travessa de vidro (base larga) (Figura1) promova a dissolução das quantidades de açúcar em água aquecida por 1'30", seguindo os procedimentos a seguir:

i) Adicionar 200mL de água (aquecida por 1'30") na travessa. Aguardar não perceber mais movimentação da água.

ii) Medir, com a colher medidora de 1g, o açúcar, conforme indicado na prática anterior.

iii) Adicionar o açúcar na água e imediatamente cronometrar o tempo de dissolução. **NÃO MEXER**

iv) Anote o tempo (tabela 5)

v) Esvazie o recipiente, lave com água e seque, para seguir para a próxima etapa

Tabela 5 – Modelo de tabela para relacionar tempo de dissolução de solução (g de açúcar / 100mL de água em água aquecida por 1'30'')

Solução	Quantidade de açúcar (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	
II	1	400	
V	2,5	200	
VI	2,5	400	

vi) Repita o procedimento (i a iv), alterando as quantidades de açúcar e água, conforme indicado na tabela 5. Preencha os dados da tabela 5.

A tabela 6 apresenta dados produzidos experimentalmente.

Tabela 6 – Tempo de dissolução de solução (g de açúcar / 100mL de água em água aquecida por 1'30'') dados experimentais

Solução	Quantidade de açúcar (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	3' 13''
II	1	400	4'07''
V	2,5	200	5'27''
VI	2,5	400	4'43''

vi) Construa uma tabela (tabela 7) representando as soluções em proporção % (g de açúcar / 100mL água) e o tempo total de dissolução em segundos.

Tabela 7 – Tempo de dissolução (segundos) de soluções com diferentes proporções % de açúcar (g de açúcar / 100mL de água em aquecida por 1'30'') - modelo

Solução	% (g de açúcar / 100mL de água em aquecida por 1'30'')	Tempo de dissolução (segundos)
I		
II		
V		
VI		

A tabela 8 apresenta dados produzidos experimentalmente.

Tabela 8 – Tempo de dissolução (segundos) de soluções com diferentes proporções % de açúcar (g de açúcar / 100mL de água em aquecida por 1'30'') dados experimentais

Solução	% (g de açúcar / 100mL de água em aquecida por 1'30'')	Tempo de dissolução (segundos)
I	0,5	193
II	0,25	247
V	1,25	327
VI	0,625	283

vii) Com o auxílio do Excel, traçar um gráfico de barras com os tempos de dissolução das soluções I, II V e VI nas diferentes temperaturas utilizadas. Analise o gráfico

obtido e compare com a tabela 9 e responda: há alguma relação?

A Figura 5 se refere aos dados produzidos experimentalmente (tabelas 6 e 8).

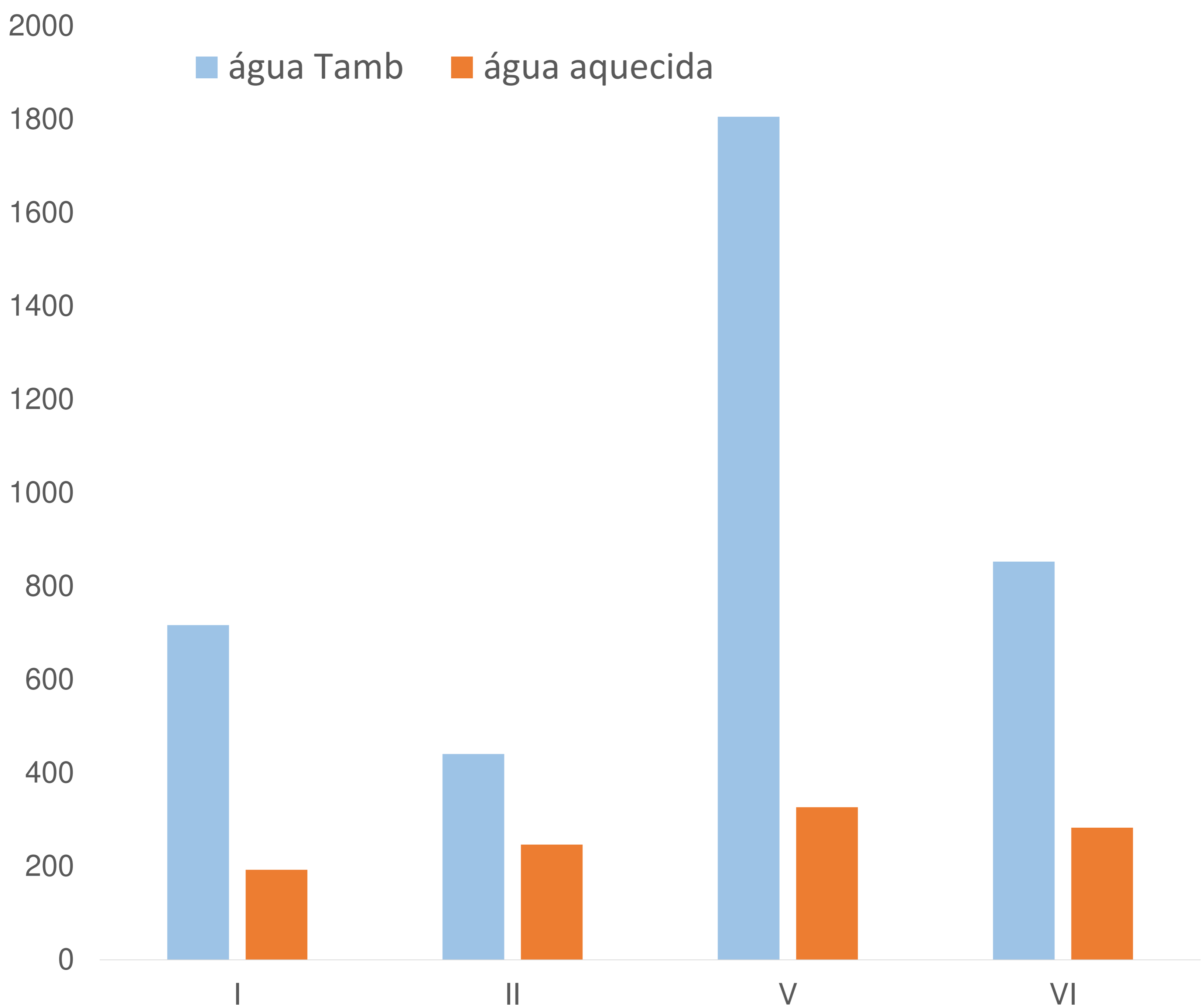


Figura 5 – Comparação dos tempos de dissolução de soluções de açúcar em diferentes proporções, expressas em g/100mL de água (I – 0,5, II – 0,25, V – 1,25, VI – 0,625), dados experimentais

3. *Conhecendo a dissolução do NaCl*

Utilizando colher medidora e travessa de vidro (base larga) (Figura 1) promova a dissolução das quantidades de sal de cozinha em água aquecida por 1'30", seguindo os procedimentos a seguir:

i) Medir, com a colher medidora de 1g, o sal. Observe que para a medida estar correta, é necessário passar a parte que não tenha serra da faca, na superfície da colher, mantendo assim apenas o sal que está dentro da colher (Figura 2). Colocar na travessa.

ii) Adicionar 200mL de água (aquecida por 1'30") na travessa, imediatamente cronometrar o tempo de dissolução. **NÃO MEXER**

iii) Anote o tempo (tabela 10)

iv) Esvazie o recipiente, lave com água e seque, para seguir para a próxima etapa

v) Repita os procedimentos (i a iv) alterando as quantidades de sal e água, conforme indicado na tabela 10. Preencha os dados da tabela 10

Tabela 10 – Tempo de dissolução do NaCl em água - modelo

Solução	Quantidade de sal (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	
II	2	200	
III	3	200	
IV	4	200	
V	5	200	
VI	6	200	

A tabela 11 apresenta dados produzidos experimentalmente.

Tabela 11 – Tempo de dissolução do NaCl em água (aquecida por 1'30")

Solução	Quantidade de sal (g)	Volume de água (mL)	Tempo de dissolução (minutos e segundos)
I	1	200	2' 00''
II	2	200	3' 02''
III	3	200	3' 47''
IV	4	200	4' 33''
V	5	200	4' 54''
VI	6	200	9' 33''

vi) Construa uma tabela representando as soluções em proporção % (g de sal / 100mL água) e o tempo total de dissolução em segundos (tabela 12).

Tabela 12 – Tempo de dissolução (segundos) de soluções com diferentes proporções % de sal (g de sal / 100mL de água) - modelo

Solução	% (g de sal / 100mL de água em aquecida por 1'30'')	Tempo de dissolução (segundos)
I		
II		
III		
IV		
V		
VI		

A tabela 13 apresenta dados produzidos experimentalmente.

Tabela 13 – Tempo de dissolução (segundos) de soluções com diferentes proporções % de açúcar (g de açúcar / 100mL de água em aquecida por 1'30'') dados experimentais

Solução	% (g de sal / 100mL de água em aquecida por 1'30'')	Tempo de dissolução (segundos)
I	0,5	120
II	1,0	182
III	1,5	227
IV	2,0	273
V	2,5	294
VI	3,0	393

vii) Com o auxílio do Excel, traçar um gráfico de dispersão com os dados da tabela 12, analise as opções das linhas de tendência, exponencial, linear e logarítmica e responda: qual função descreve a dissolução do sal em água? Qual a equação do gráfico?

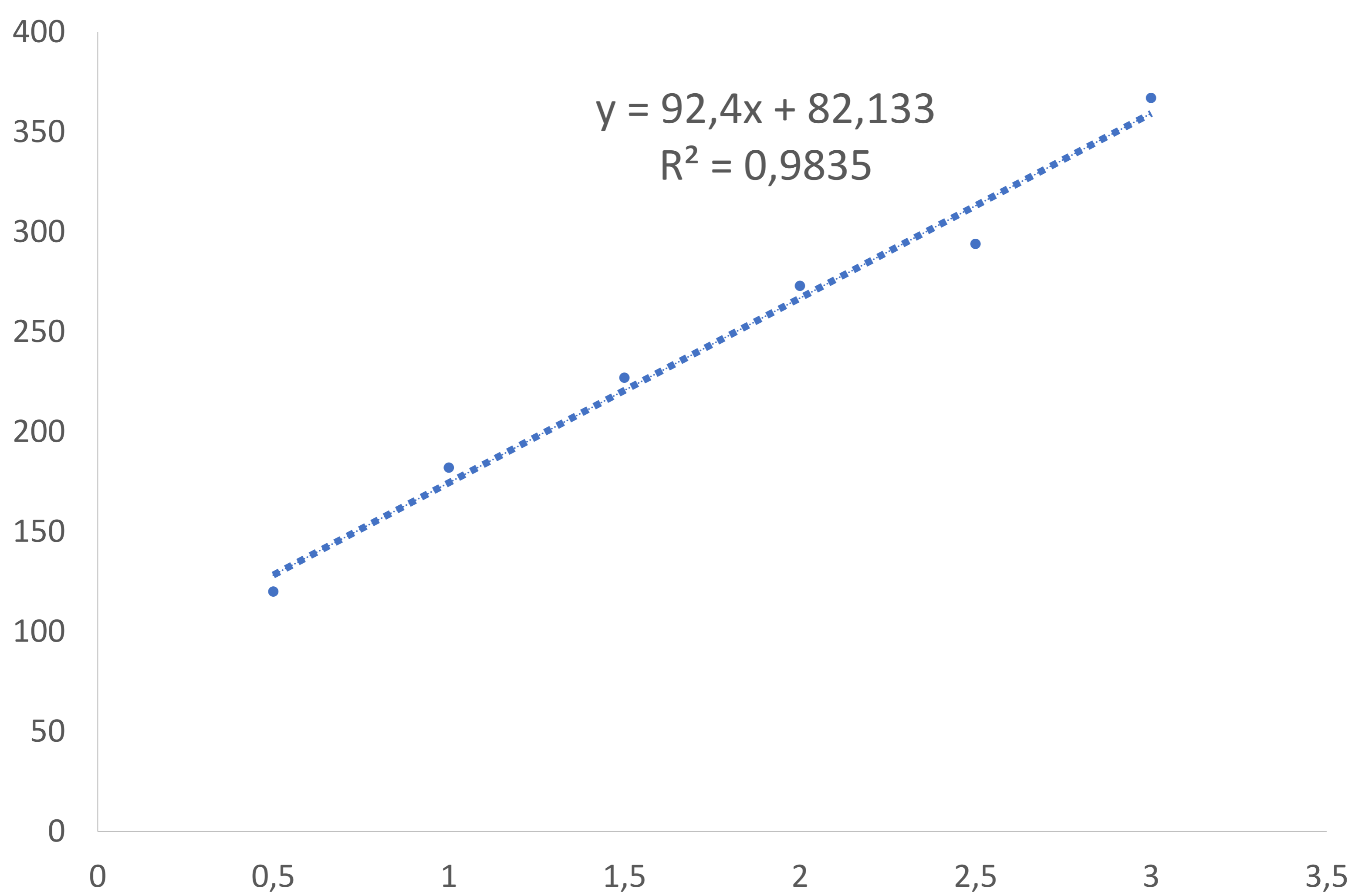


Figura 6 – Equação associada a dissolução do NaCl em água, dados experimentais

CAPÍTULO 8 - A MOLÉCULA DE ÁGUA E A TEORIA DOS GRAFOS

Um grafo $G = (V,E)$ é definido por um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E , onde cada aresta é um par de vértices e estes, também chamados de nós, podem representar entidades e as arestas as relações entre estas entidades (Figura 1) (Diogo Correia, [s.d.]).

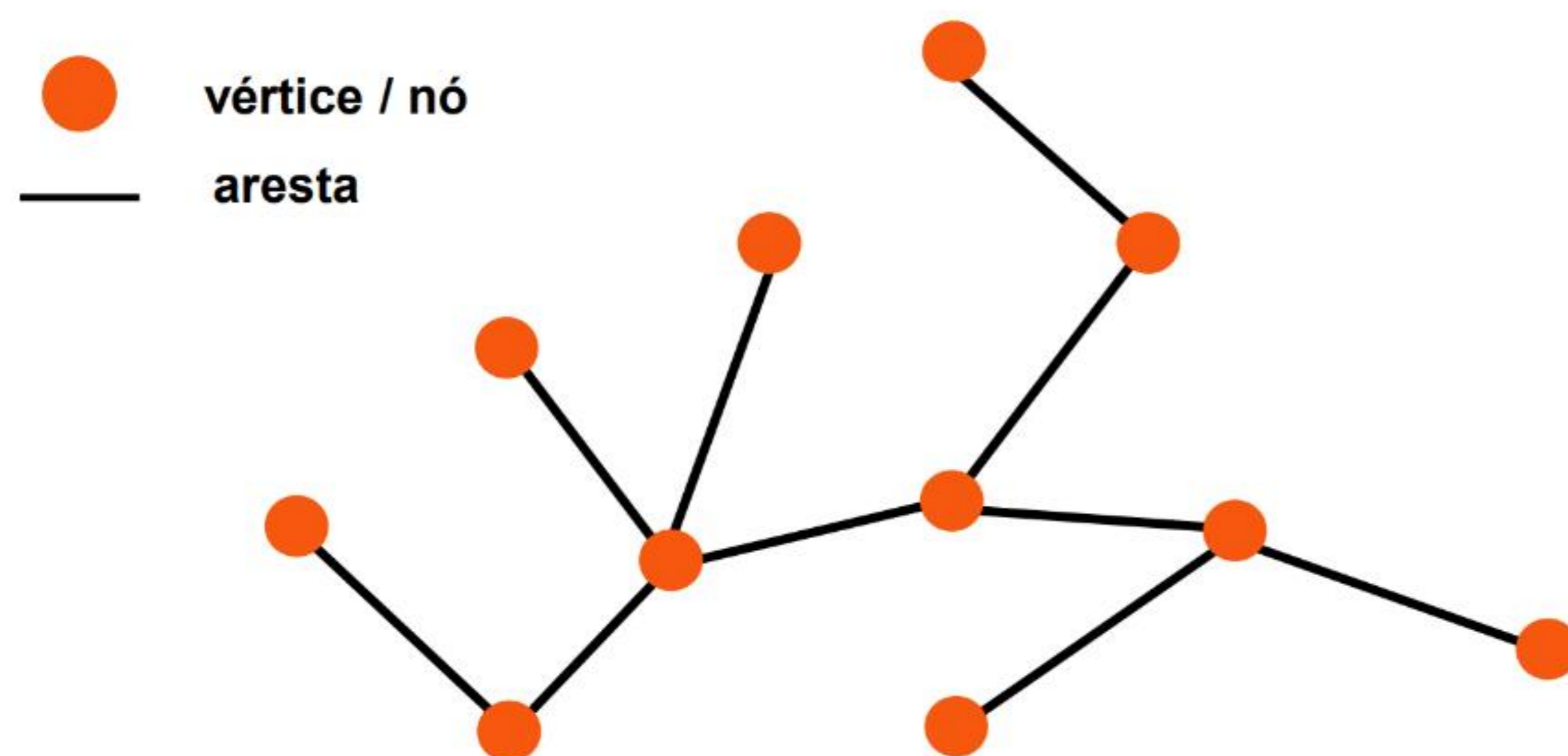


Figura 1 – Grafo – conjunto de vértices e um conjunto de arestas / nós
(("Grafos | Resumos LEIC-A", [s.d.]

O grau do nó é a medida mais simples de centralidade, considerando apenas os primeiros vizinhos de um nó e a interação da molécula da água representa um grafo (Figura 2)(Faccio *et al.*, 2022).

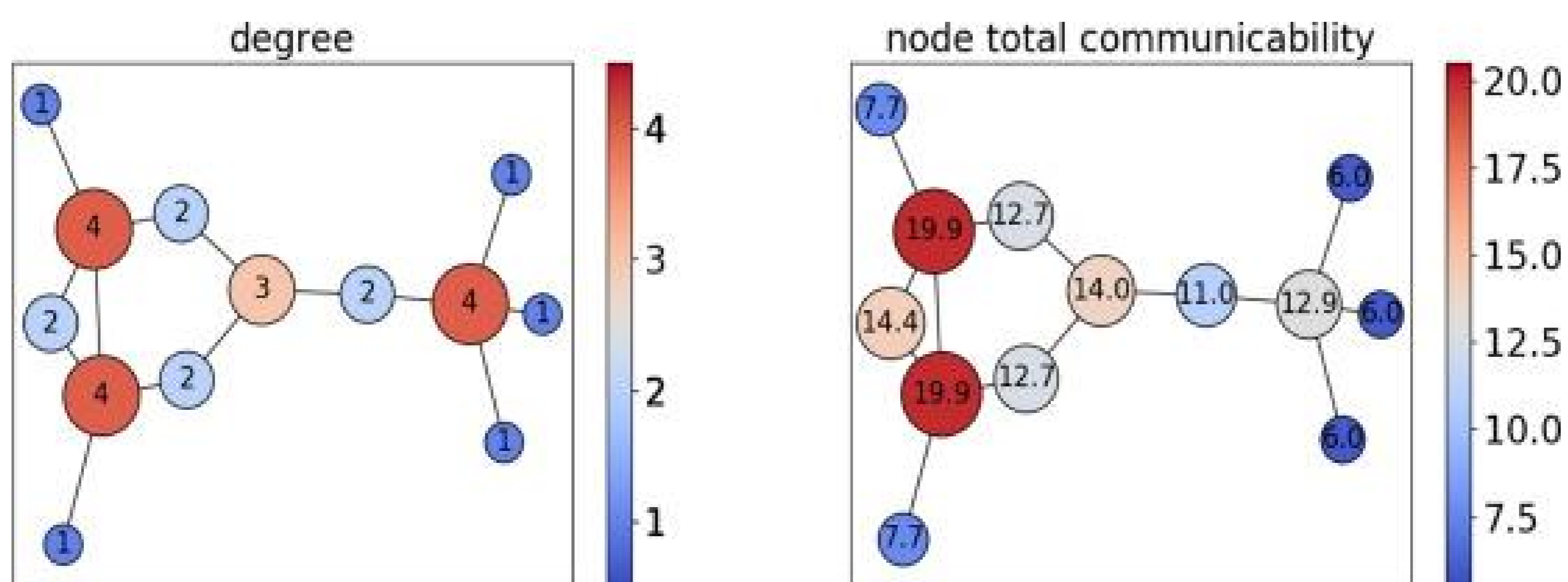


Figura 2 – Grafos representando a interação da molécula da água, indicando diferentes graus de centralidade dos nós (vermelho maior centralidade e azul menor centralidade)(FACCIO et al., 2022).

Um grafo é chamado de direcionado se as arestas têm uma única direção, caso contrário, é não direcionado. Para a compreensão da estrutura da água líquida em diferentes condições de densidade, foi aplicada a teoria dos grafos, onde cada molécula de água representou um nó e a ligação entre estas a aresta (Figura 3) e foi observado que as formas da água em alta densidade não são homogêneas, com alto conteúdo de molécula de água intersticial (Figura 4)(Faccio *et al.*, 2022; Huang, Huang e Li, 2022).

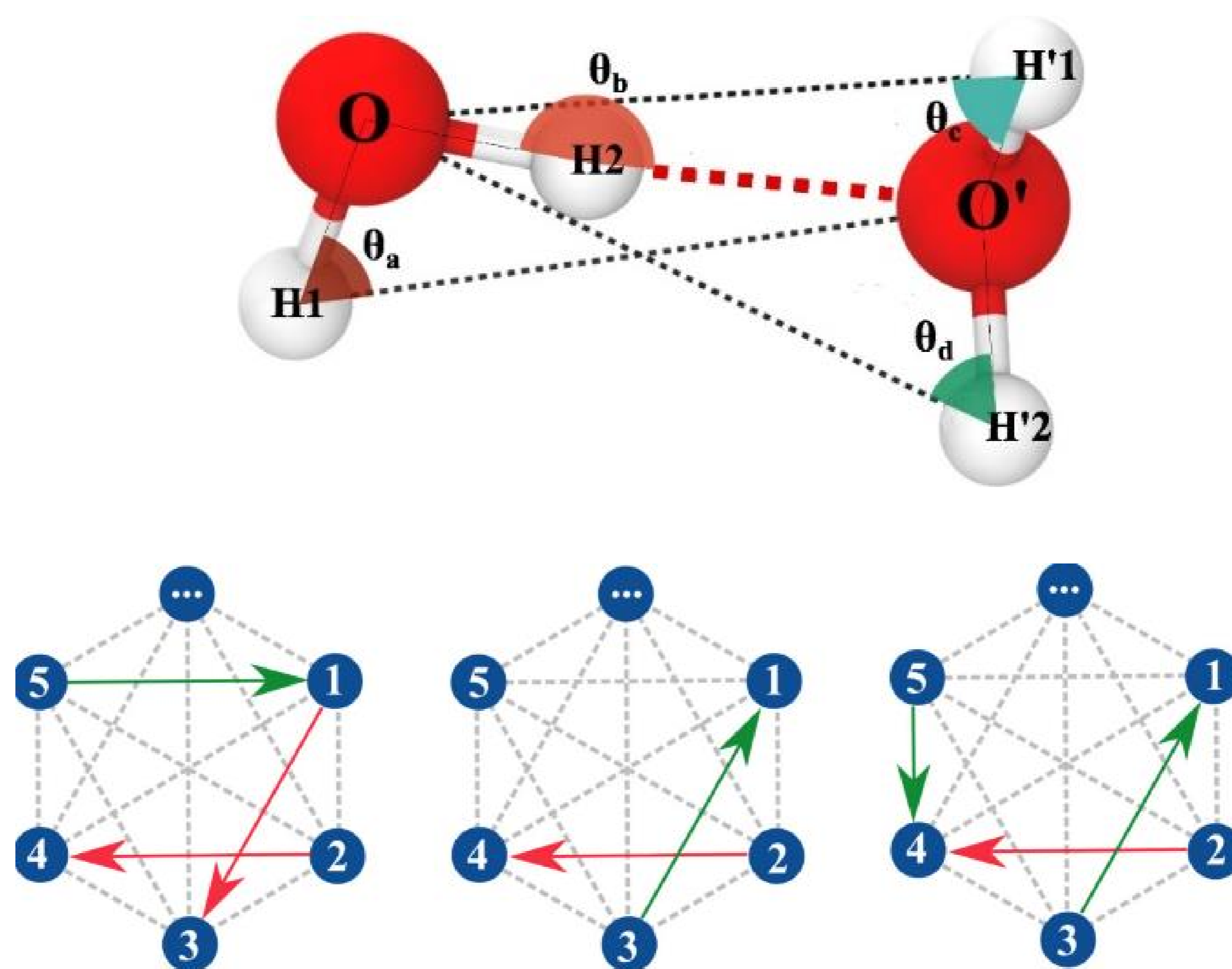


Figura 3 – Interação das moléculas de água (no grafo representados pelos nós numerados) aplicando a teoria dos grafos (HUANG; HUANG; LI, 2022)

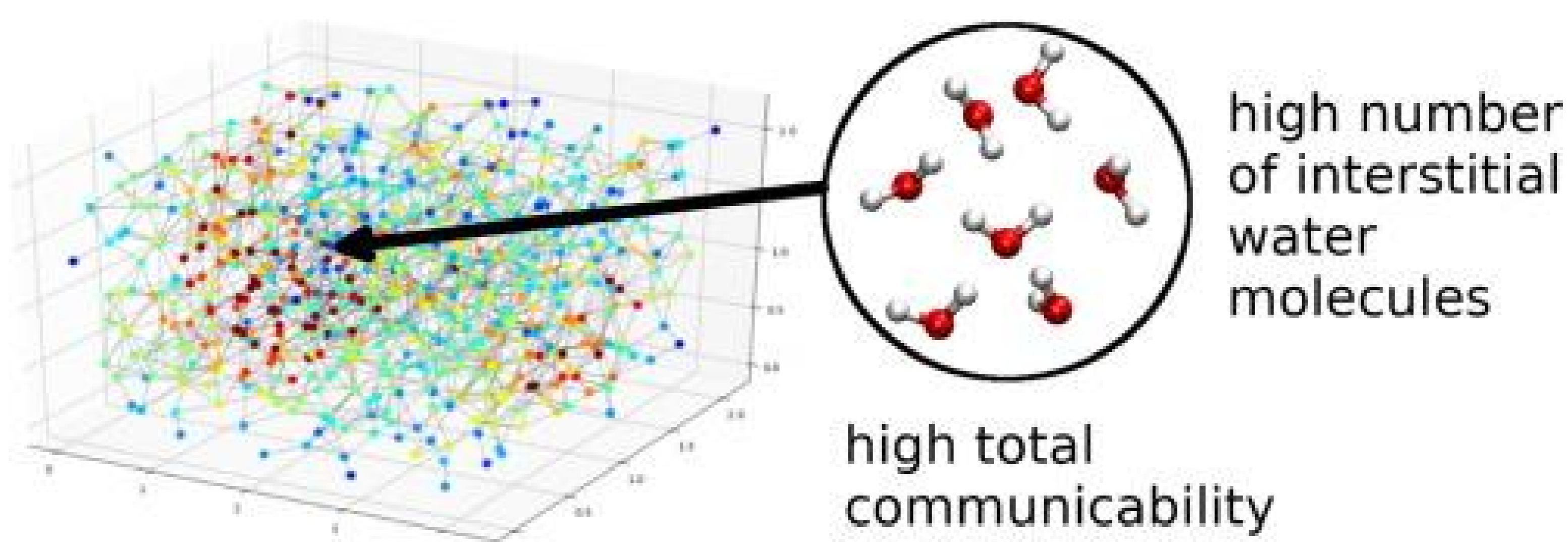


Figura 4 - Compreendendo a estrutura da água líquida com a aplicação da teoria dos grafos (FACCIO et al., 2022)

Os osmólitos são pequenas moléculas orgânicas, como os aminoácidos e seus derivados, que mantêm a estabilidade celular e a função biológica em condições de estresse osmótico (altas concentrações de sal,

temperaturas extremas ou desidratação), estudo mostra que estes atuam como hubs dentro da rede de ligações de hidrogênio da água, promovendo mudanças na estrutura tetraédrica da água, quando aplicada a teoria dos grafos (Figura 5) (Sundar, Sandilya e Priya, 2021).

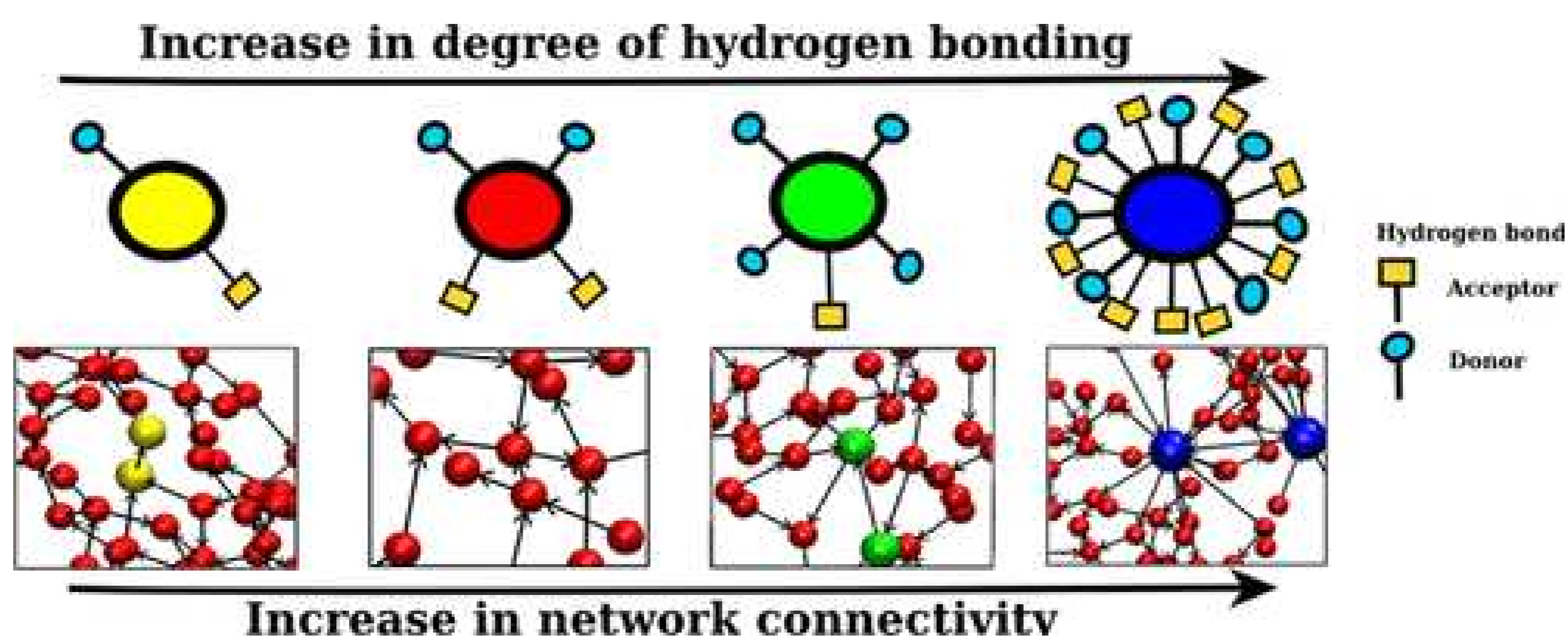


Figura 5 – Teoria dos grafos aplicada para analisar rede de ligações do hidrogênio da água na presença de osmólitos (SUNDAR; SANDILYA; PRIYA, 2021).

Vários são os softwares que pode ser aplicados para a construção de um grafo, desde o uso do R, onde a construção é feita trabalhando o grafo na forma de matriz, a ferramentas simples ([Graph Visualizer \(graphvizer.com\)](http://graphviz.com)) à mais complexas ([Graphviz](http://graphviz.com)).

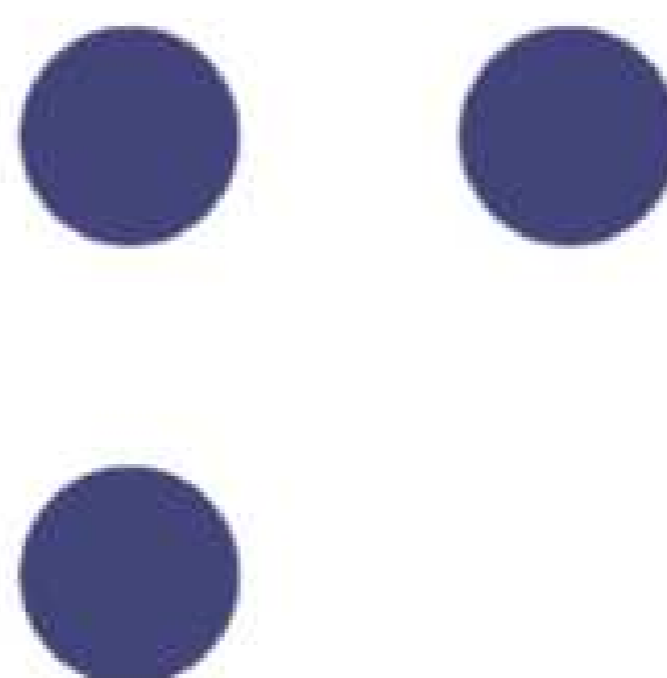
Na perspectiva de apresentar um grafo, independentemente do nível escolar, está sendo detalhado abaixo, passo a passo para a construção de um grafo para entender a estrutura de um cristal de gelo, que como já foi visto se forma por moléculas de água dispostas em rede hexagonal:

i) Abra o software [Graph Visualizer \(graphviz.com\)](http://graphviz.com)

ii) Para limpar a área gráfica, clique em “Clear Graph”

iii) Considerando que cada hidrogênio (2) e cada oxigênio da molécula da água é um vértice, construa os vértices (nós), clicando em “Add node”.

Clear Graph ▲ ▼ Add Node Delete Node ▲ ▼ Add Edge Delete Edge ▲ ▼



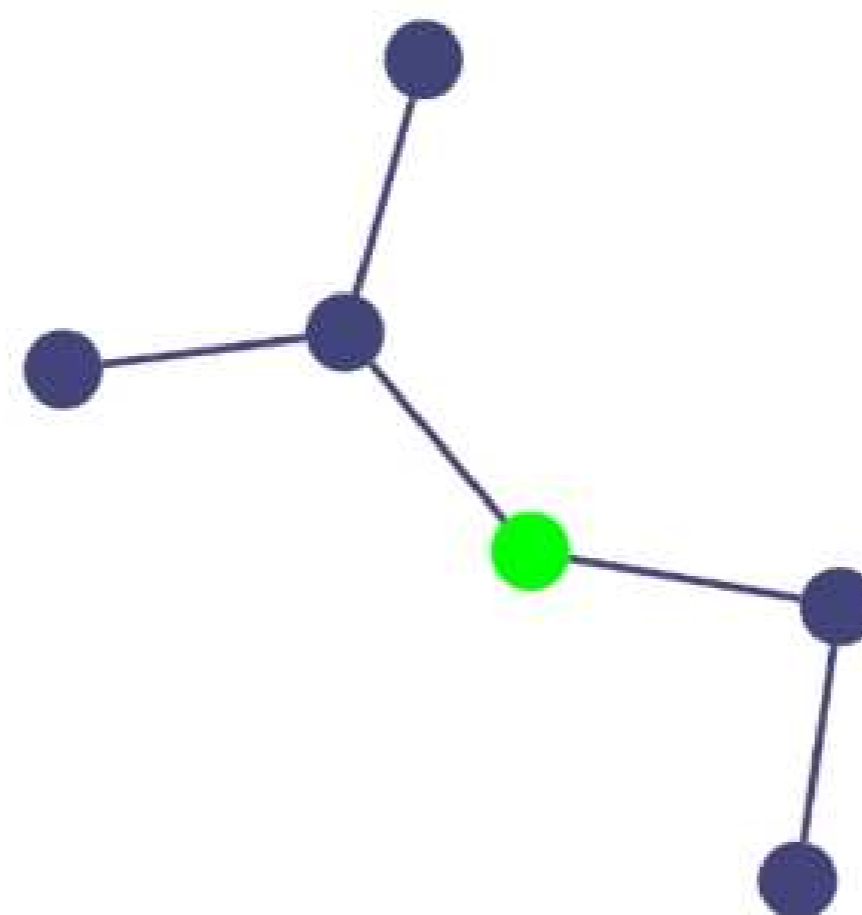
iv) A partir do vértice que corresponde ao oxigênio, trace as arestas, clicando no vértice, na sequência em “Add edge” e, em seguida, no nó que corresponde a um dos átomos de hidrogênio. Repita procedimento com o outro átomo de hidrogênio e ajuste o grafo mantendo angulação similar à molécula da água.

Clear Graph ▲ ▼ Add Node Delete Node ▲ ▼ Add Edge Delete Edge ▲ ▼ Add Node Delete Node ▲ ▼ Add Edge Delete Edge ▲ ▼

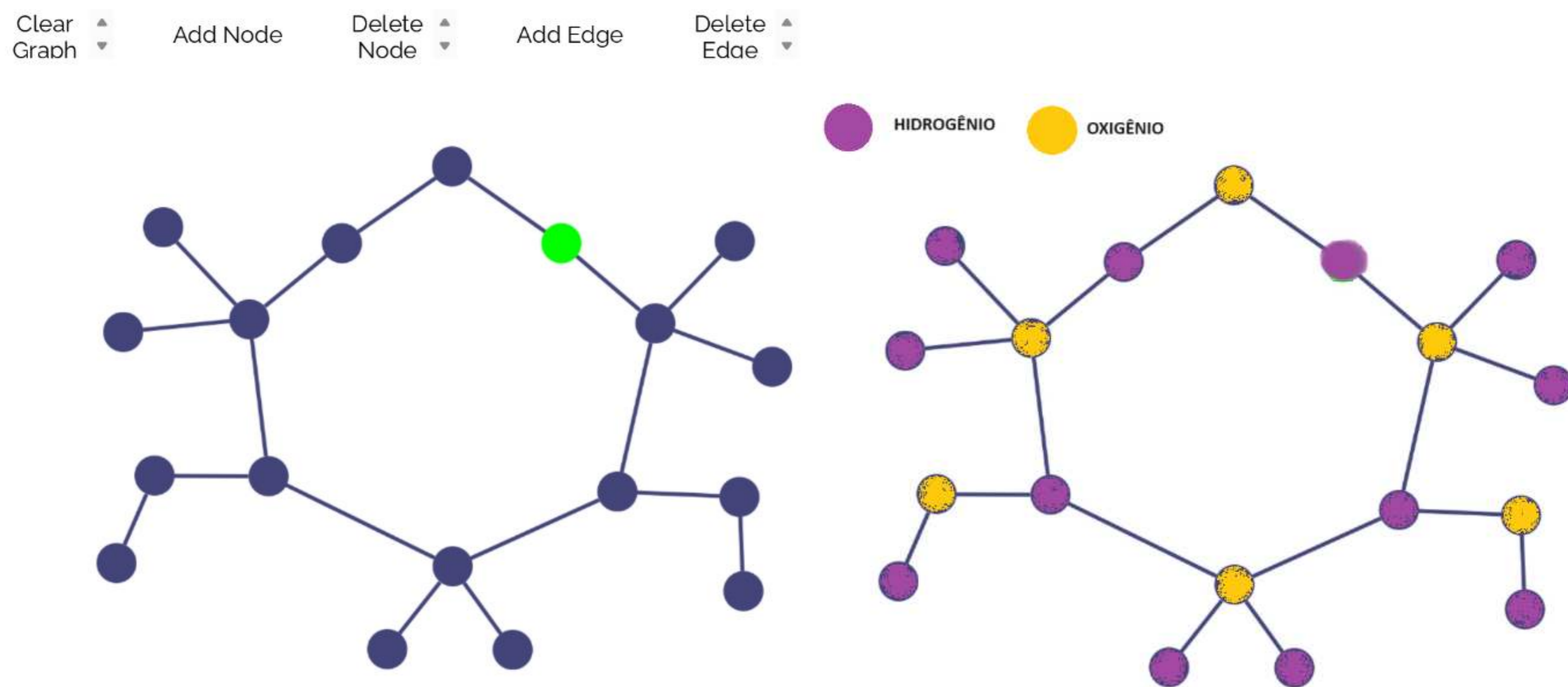


v) Repita os procedimentos de 1 a 4, para construir nova molécula da água. Ligue as duas “moléculas da água”, considerando a interação entre hidrogênio e oxigênio.

Clear Graph ▲ ▼ Add Node Delete Node ▲ ▼ Add Edge Delete Edge ▲ ▼



vi) Repita o procedimento v construindo mais 4 moléculas de água



CONCLUSÃO

Para a produção deste trabalho, duas coisas foram essenciais, querer abordar uma temática que aguçou minha curiosidade há alguns anos e compreender sua relação efetiva com a ciência da matemática. A ciência é dinâmica e, na minha concepção, absolutamente tudo está integrado, facilmente perceptível ou milimetricamente “escondido”. Em alguns momentos o olhar de um educador pode não perceber o que a visão de seu aluno alcança e, consciente ou inconsciente pode vedar esta visão e, com isto, limitar as possibilidades de compreensão e, principalmente, interesse em conhecer.

É surpreendente como o campo da matemática interage com a molécula da água e, por ter o foco no ensino básico, não foi explorada a área de modelagem e a grafologia foi apresentada superficialmente. Mas, foi possível verificar como existem campos de estudo que envolvem esta estrutura química e como o que permeia a geometria sagrada tem potencial não somente nas artes e arquitetura com também na área da saúde.

Tenho convicção que não é uma tarefa fácil promover o ensino da matemática aplicando atividades variadas, mas também tenho total convicção que é possível tornar o ensino desta ciência mais atrativo, inclusivo, aplicável nas mais variadas áreas da ciência e com isto promover a formação de uma criança / jovem de forma mais integral, quando se considera aspectos culturais, científicos e, por que não emocionais?

Ao mostrar a interação da beleza da natureza, das artes, dos pensamentos filosóficos, do funcionamento do corpo com a ciência da matemática, acredito que está sendo plantada uma semente que promove o crescimento da curiosidade e o desenvolvimento da criatividade e da criticidade.

Cabe a todos os formadores divulgarem boas ideias e se vive em uma era onde a tecnologia é extremamente favorável para o ensino mais interativo e dinâmico, permitindo assim contínua atualização do educador e contínua inovação em sua sala de aula.

Acredito que este trabalho propicia a produção de uma nova abordagem no ensino da matemática, onde, a partir de uma temática que se pretende desenvolver, o educador pode buscar, nas mais variadas áreas como esta temática está relacionada e, com isto, propor novas formas de abordagem.

Tem-se muito a evoluir, não somente na ciência da matemática como no ensino desta, e para este último, deve-se ter clara a imensa responsabilidade que o educador tem e, em especial o professor de matemática, pois o pensamento lógico é uma ferramenta essencial e poderosa para todos os ramos profissionais e promover uma construção deste pensamento em todas as fases da formação básica é essencial para a continuidade na formação profissional deste indivíduo.

Nesta perspectiva, a questão básica é qual caminho escolher para disseminar o ensino da matemática? Espero que sempre a escolha seja o que mantém a integridade científica, mas também o que permite conversar com todos os questionamentos e

pensamentos, dos mais surpreendentes vindo de uma criança aos mais consistentes vindo de um profissional.

REFERÊNCIAS

(3) **3D molecular visualisation - Water turning into ice - YouTube.** Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=zRUFzJrDtq0>>. Acesso em: 13 jun. 2024.

ALZYOUD, J. A. M.; JACOUB, K. M.; OMOUSH, S. A.; AL-SHUDIEFAT, A. A. R. S. Da Vinci's Vitruvian Man, Golden Ratio and Anthropometrics. **Italian Journal of Anatomy and Embryology**, v. 125, n. 1, p. 67–81, 2022.

Arquivos 3D — LABBIO - PPGAN. Disponível em: <<https://www.unirio.br/ppgan/matlabbio/arquivo-3d>>. Acesso em: 12 jun. 2024.

BOLDRINI, S. A.; GAZIRE, E. S. A prática Argumentativa Geométrica: da Intuição à Lógica Dedutiva. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 12, n. 2, p. 229–246, 2018.

BRITO, A. DE J.; DALCIN, A. O que a história pode nos dizer sobre uma suposta natureza da matemática. **REMATEC**, v. 18, n. 44, p. e2023008–e2023008, 2023.

CASSELA, E. A. D.; ANDRÉ, A. L.; CABRERA, Y. M. A proporção áurea como base de senso estético em desenhos artísticos. **ERAS | European Review of Artistic Studies**, v. 12, n. 1, p. 56–73, 30 jun. 2021.

CRISTÓBAL VILA. **Nature by numbers.**

ANDRADE, É. C. B. DE. **Análise de alimentos - uma visão química da Nutrição.** 4a. ed. São Paulo: [s.n.].

FACCIO, C.; BENZI, M.; ZANETTI-POLZI, L.; DAIDONE, I. Low- and high-density forms of liquid water revealed by a new medium-range order descriptor. **Journal of Molecular Liquids**, v. 355, p. 118922, 1 jun. 2022.

FARINHA, G. H. L.; OLIVEIRA ALVES, T. F. DE. The mathematics on classical ballet: connections between the beautiful and the exact. **OBSERVATÓRIO DE LA ECONOMÍA LATINOAMERICANA**, 2024.

FLÓRIDA: WIKIMEDIA FOUNDATION. **GEOMETRIA.** Disponível em: <<<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometria&oldid=67581579>>>. Acesso em: 5 mar. 2024.

FONSECA, M.; GONTIJO, C. Pensamento Crítico e Criativo em Matemática: uma Abordagem a partir de Problemas Fechados e Problemas Abertos. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, p. 1, 17 abr. 2021.

FONTANA, F.; SAGAVA, Â. C. B. Sensibilização sobre o desperdício de água nas séries finais do ensino fundamental: utilizando a matemática para promover a educação ambiental. **OBSERVATÓRIO DE LA ECONOMÍA LATINOAMERICANA**, v. 22, n. 5, p. e4554–e4554, 7 maio 2024.

GHORBANI, M.; IZADI, F. S.; ROSHAN, S. S.; EBRAHIMPOUR, R. Assessing Prospective Teachers' Geometric Transformations Thinking: A Van Hiele Theory-Based Analysis with Eye Tracking Cognitive Science Method. **Technology of Education Journal (TEJ)**, v. 18, n. 1, p. 67–88, 2023.

Golden Ratio. Disponível em: <<https://www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html>>. Acesso em: 16 jun. 2024.

DIOGO CORREIA. **Grafos | Resumos LEIC-A.** Disponível em: <<https://resumos.leic.pt/iaed/grafos/>>. Acesso em: 19 jul. 2024.

HENEIN, M. Y.; ZHAO, Y.; NICOLL, R.; SUN, L.; KHIR, A. W.; FRANKLIN, K.; LINDQVIST, P. **The human heart: Application of the golden ratio and angle** *International Journal of Cardiology* Elsevier Ireland Ltd, , 4 ago. 2011.

HUANG, J.; HUANG, G.; LI, S. A Machine Learning Model to Classify Dynamic Processes in Liquid Water**. **ChemPhysChem**, v. 23, n. 1, p. e202100599, 5 jan. 2022.

KABINAA ENOCH, S. Exploring Gender Disparity in Geometry Learning Using Van Hiele's Model: A Quasi-Experimental Study of Final Year Male and Female Students' Performance. 18 mar. 2024.

La Qualité des Eaux de consommation - L'influx. Disponível em: <<https://www.linflux.com/sciences/la-qualite-des-eaux-de-consommation/>>. Acesso em: 9 jun. 2024.

LIBRETEXTS CHEMISTRY. **LibreTexts Chemistry.**

LIMA, T. F. DE; SANTOS, J. M. R. DOS; SANTOS, J. N. DOS. O uso do recurso didático no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (Online)**, v. 8, n. 23, 2021.

MARÍA. **Espiral de Durero.**

MARTA CRUZ-GUZMÁN, A. G.-C.; CRIADO, A. M. Analysis of the models proposed by prospective pre-primary teachers when studying water. **International Journal of Science Education**, v. 42, n. 17, p. 2876–2897, 2020.

MELLO, L. I. P.; RHEINHEIMER, J. M. Por que apenas 5 poliedros de Platão? **Remat (Bento Gonçalves)**, v. 1, n. 2, 2016.

MITRA, S.; SADHUKHAN, M. C. Spatial growth of religious architecture: Case of Indian temples. *Em: Springer Geography*. [s.l.] Springer, 2020. p. 401–425.

MONNOT, S. Between Reasoning and Resonance Proposal of Intelligibility for Inhabiting the Crossroads of the Five Chinese Elements and the Five Platonic Solids. **Journal of Architectural and Engineering Research**, v. 6, n. 6, p. 56–70, 29 abr. 2024.

MOURA, F. A. A.; NUNES, A. K. F. Ensino da matemática no século XXI: D'Ambrosio e a mediação pelo digital. **Eccos (São Paulo, Brazil)**, n. 67, p. e24271–16, 2023.

RAGHANI, S.; BRAR, T. S.; KAMAL, M. A. Impact of Contemplative Spaces and Sacred Geometry on Spiritual Development. **American Journal of Civil Engineering and Architecture**, v. 9, n. 2, p. 59–63, 2021.

RIBEIRO RESENDE, M.; LIMÍRIO BRIGAGÃO, E. Objetos de aprendizagem no ensino da Matemática: o estado do conhecimento no período de 2013 a 2018. **Revista Triângulo**, v. 15, n. 3, p. 1–21, 2023.

RIUS SANTAMARIA, C. Park Güell: Reconstructing the Temple of Jerusalem through Light and Aesthetic geometry. **Materia (Barcelona, Spain)**, n. 16–17, p. 171–198, 2020.

SANTOS, N. T.; BRAGA, R. M.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Entrelaçamento entre modelagem Matemática e a teoria da complexidade de Edgar Morin. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–16, 2021.

SANTOS, S. M. A. V.; MARQUES, C. D.; SALATIEL, E. M.; LAMEIRA, F. DA C.; CELLA, H. C. C.; CUNHA, L. C. DA S.; MEROTO, M. B. DAS N.; NARCISO, R. A tecnologia e os jogos como aliados no ensino da matemática do ensino fundamental II. **Revista Foco**, v. 16, n. 11, p. e3775, 2023.

SILVA, C. P. P.; BITTENCOURT, O. S. A.; GUZZO, G. B. Água e seus estados físicos: uma proposta de ação interdisciplinar. **Scientia cum Industria**, v. 12, n. 1, p. e231217, 29 mar. 2024.

SILVA, N. L. DA; SOUZA COUTO, M. E.; CUNHA JÚNIOR, A. S. Educação matemática crítica: a crítica no ensino da matemática. **Revista Binacional Brasil - Argentina**, v. 4, n. 2, 2020.

SILVA, W. DE; AMARAKOON, N. Sustainable city geometries: sacred geometry of ritual space, architecture and city landscape in Kandy, Sri Lanka. **WIT Transactions on Ecology and the Environment**, v. 249, p. 153, 2020.

JHONILSON PEREIRA GONÇALVES. **Solubilidade**. Disponível em: <<https://www.manualdaquimica.com/fisico-quimica/solubilidade.htm>>. Acesso em: 2 set. 2024.

DIOGO LOPES DIAS. **Solubilidade dos sais**. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/quimica/solubilidade-dos-sais.htm>>. Acesso em: 2 set. 2024.

MAYARA CARDOSO. **Solvatação**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/quimica/solvatacao/>>. Acesso em: 2 set. 2024.

SUMARTO, H.; JUNAEDI, I.; AHMADI, F.; MARWOTO, P.; SUMARNI, W. Basic Mathematical Literacy Skills Ability by Van Hiele Project Based Learning Theory. **Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif**, v. 13, n. 2, p. 199–209, 21 jul. 2022.

SUNDAR, S.; SANDILYA, A. A.; PRIYA, M. H. Unraveling the Influence of Osmolytes on Water Hydrogen-Bond Network: From Local Structure to Graph Theory Analysis. **Journal of Chemical Information and Modeling**, v. 61, n. 8, p. 3927–3944, 23 ago. 2021.

TAVAKOLI, A.; GISIN, N. The Platonic solids and fundamental tests of quantum mechanics. **Quantum**, v. 4, p. 293, 9 jul. 2020.

THAPA, G. B.; THAPA, R. The Relation of Golden Ratio, Mathematics and Aesthetics. **Journal of the Institute of Engineering**, v. 14, n. 1, p. 188–199, 4 jun. 2018.

TRINDADE, A. K. DA; ARAÚJO JÚNIOR, F. DE P. S. DE; NASCIMENTO, F. DOS S. Grafos: uma nova visão da relação de Euler e os Poliedros regulares. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 7, n. 1, p. 168–190, 2020.

UTOMO, D. P.; AMALIYAH, T. Z.; DARMAYANTI, R.; USMIYATUN, U.; CHOIRUDIN, C. Students' Intuitive Thinking Process in Solving Geometry Tasks from the Van Hiele Level. **JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)**, v. 7, n. 1, p. 139–149, 12 jan. 2023.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE. **Welcome to Plus! | plus.maths.org**. Disponível em: <<https://plus.maths.org/content/>>. Acesso em: 2 set. 2024.

YALTA, K.; OZTURK, S.; YETKIN, E. Golden Ratio and the heart: A review of divine aesthetics. **International Journal of Cardiology**, v. 214, p. 107–112, 1 jul. 2016.

